修　士　論　文

題　　目　　3次元シミュレーションによる低アスペクト比
RFPプラズマのMHDダイナミクスの研究

主任指導教員　　政宗　貞男　教授

京都工芸繊維大学大学院　工芸科学研究科
電子システム工学専攻

学生番号　　08621035

氏　　名　　藤田　慎一

平成22年2月10日提出

3 次元シミュレーションによる低アスペクト比 RFP プラズマの MHD ダイナミクスの研究

平成 22 年　　08621035　藤田　慎一

概　要

RFP(Reversed Field Pinch：逆転磁場ピンチ) は磁場によるプラズマ閉じ込め方式の１つであり，外部から加えるトロイダル磁場とプラズマ内部を流れるプラズマ電流が作るポロイダル磁場によりプラズマを閉じ込めている．理論計算により RFP プラズマのアスペクト比 (大半径 R_0 と小半径 a の比 $A = R_0/a$) を小さくすることによる利点が明らかとなり，低アスペクト比化によるプラズマの性能向上が期待されている．低アスペクト比 RFP 実験装置“ RELAX ”において様々なプラズマの MHD 不安定性が観測されている．本研究は３次元数値シミュレーションにより低アスペクト比による効果 (トロイダル効果) が MHD 不安定性の振る舞いに与える影響を明らかとすることを目的とする．シミュレーションにおけるプラズマモデルには粘性と抵抗を持つ１流体 MHD モデルを用い，アスペクト比が 2 の円形断面をもつプラズマが完全導体壁で囲まれるという境界条件である．

シミュレーションを行った結果，典型的な RFP 配位ではトロイダルモード数 $n = 4$ の成長が見られる．これが主要モードとして成長し，振幅が飽和した後に抵抗性拡散時間程度で減衰していく．この $n = 4$ モードは初期平衡配位においてのプラズマ内部に共鳴面を持つポロイダルモード数 $m = 1, n = 4$ モードである．これは理論予測や実験結果と一致するものである．またプラズマ全域で $n = 4$ の変形が見られる．これは $n = 4$ モードが支配的になった結果である．$n = 4$ モードの成長と同時に $n = 8$ モードの成長が見られるが，これは $n = 4$ モードの高調波でありその構造は $m/n = 2/8$ である．$n = 8$ モードは $n = 4$ モードの共鳴面と同じ面で成長する．不安定性が成長した後，RFP プラズマの緩和現象が得られる．この緩和現象にはプラズマ抵抗が大きな役割を果たしている．プラズマの抵抗率が小さくなると不安定性の成長率は小さくなるので，この不安定性は抵抗性不安定性である．初期平衡配位の違いによってモード成長の初期の振る舞いは異なるが，$-0.4 \leq F \leq 0$ の範囲においては $n = 4$ モードが主要モードとなることが確かめられる．

3-D simulation studies on MHD dynamics
in low-aspect-ratio RFP plasmas

2010 **08621035 Shinichi FUJITA**

Abstract

The RFP (Reversed Field Pinch) is one of the plasma confinement configuration by the magnetic field for nuclear fusion. The RFP confines plasmas by the combination of poloidal magnetic field generated by the toroidal plasma current and external toroidal magnetic field. Some theoretical computations predict low aspect ratio ($A = R/a$, where $R(a)$ is the major (minor) radius) RFP is expected to confine high performance plasmas. In this study, the physical mechanisms of macroscopic behavior of MHD instabilities observed in a low-A RFP machine RELAX by use of three-dimensional numerical simulation code. This simulation code has adopted 1-fluid, visco-resistive MHD model in purely toroidal (3-D) geometry so its result includes the effects caused by lowering the aspect ratio (the toroidal effect). In the simulation results, initial growth of the mode with toroidal mode number $n = 4$ has been observed for a typical RFP equilibrium reconstructed from experimental RFP profile. This is the growth of a mode with poloidal mode number $m = 1$, and since $n = 4$ for this mode, the resonant surface (the location where the safety factor $q = m/n = 1/4$) lies in the initial RFP configuration. The gradual deformation of the plasma with $m = 1/n = 4$ structure has been observed during the growth phase of the $n = 4$ mode so it means that the $n = 4$ mode becomes dominant. Following the growth of the $n = 4$ mode, the $n = 8$ mode grows with almost the same growth time, indicating that the $n = 8$ mode is the higher harmonics of the $n = 4$ mode and the structure is $m/n = 2/8$. In fact, the $n = 8$ mode grows at the same resonant surface as that of $n = 4$ mode .Once the instabilities grow to a sufficient amplitudes, the RFP plasma relaxes to a steady state. The plasma resistivity plays a major role in this relaxation phenomenon. The growth rate of instability depends upon the plasma resistivity, so, the dominant modes are resistive instabilities. The behavior of the modes in the growth phase depends on the initial equilibrium configuration. In the range $-0.4 \leq F \leq 0$,the $n = 4$ mode grow larger than others.

目　次

第 1 章　緒言 **1**

1.1 背景・目的 1

1.2 MHD 1

第 2 章　理論 **3**

2.1 変数・座標系 3

2.2 RFP 磁場配位 [3] 3

2.3 流体方程式 [4] 4

2.4 MHD 方程式 [3][5][6] 6

2.5 エネルギー方程式 [5][7] 7

2.6 MHD 平衡 8

2.7 Grad-Shafranov 方程式 9

2.8 プラズマの緩和現象 [9] 11

2.9 (m,n) モードとフーリエ変換 13

第 3 章　MHD シミュレーションモデル **17**

3.1 実験装置“ RELAX ” 17

3.2 シミュレーションの座標系 17

3.3 シミュレーションの基礎方程式 17

3.4 シミュレーション手順 19

3.5 平衡配位 21

3.6 境界条件と初期条件 21

第 4 章　シミュレーション結果 **28**

4.1 典型的な RFP 磁場配位におけるシミュレーション結果 28

4.2 パラメータ依存性 30

4.3 $F-\Theta$ 依存性 31

第 5 章　考察 **50**

第 6 章　結言 **57**

付録 **58**

謝辞 **60**

参考文献 **62**

第 1章　緒言

1.1　背景・目的

21 世紀初頭の現在，将来のエネルギー需要を満たすために様々な新エネルギーが研究開発されている．核融合反応を用いた核融合発電もその一つであり，長期にわたって研究されてきたが，その複雑な物理機構によって未だに研究の途上にある．核融合反応には高温のプラズマ用いるが，大きく分けて二つの方法があり，低密度プラズマによる反応と，高密度プラズマによる反応の二種類がある．前者は磁場によって閉じ込められ，後者は慣性により閉じ込められている．現在核融合反応の実験炉として ITER が建設されている．この実験炉はトカマク方式と呼ばれる磁場閉じ込め方式を用い，プラズマを閉じ込めている．RFP(Reversed Field Pinch：逆転磁場ピンチ) は磁場によるプラズマ閉じ込め方式の１つであり，外部から加えるトロイダル磁場とプラズマ内部を流れるプラズマ電流が作るポロイダル磁場によりプラズマを閉じ込めている．近年 RFP プラズマの研究が進み，閉じ込め機構の理解が進み，閉じ込め時間の伸長や閉じ込め温度の上昇などの性能改善が進んでいる．理論計算により RFP プラズマのアスペクト比を小さくすることによる利点が明らかとなり，プラズマの性能向上が期待されている [1]．この低アスペクト比による効果を実験的に調べることを目的として，実験装置 RELAX(REversed field pinch of Low Aspect ratio eXperiment) は大半径 R_0 と小半径 a のアスペクト比 ($A = R_0/a = 2$) である低アスペクト RFP 実験装置を用いている．この実験装置は円形断面の抵抗性壁を持ちプラズマの境界はこの壁である．本研究はこの RELAX において観測された巨視的な振る舞いを３次元数値シミュレーションにより明らかにすることが目的である．本研究は３次元シミュレーションであるため，低アスペクト比による効果 (トロイダル効果) を含めることができる．

1.2　MHD

プラズマの理論研究のアプローチとしてプラズマを巨視的な視点から取り扱う方法と微視的な視点から取り扱う方法の２種類がある．前者はプラズマを流体として

取り扱い，後者はプラズマを粒子の集合として取り扱う．シミュレーションモデルにも流体モデルを用いる方法と粒子モデルを用いる方法とがあり [2]，代表的なものが MHD(MagnetoHydro Dynamics) と PIC(Particle-In-Cell) である．MHD とは電導性の流体を扱うように拡張された流体力学であって，電磁流体力学と称する．MHD モデルにもプラズマを 1 流体として考えるモデルと電子流とイオン流の 2 流体として考えるモデルがあるが，実験におけるプラズマの現象は多くの場合，個々の粒子の運動を無視した巨視的な視点から電磁力を考慮した 1 流体の運動として説明することができる．本研究はプラズマの巨視的な振る舞いに注目しているため 1 流体 MHD モデルを用いてシミュレーションを行う．

第 2章　理論

2.1　変数・座標系

本論文では磁場を B [T]，電場を E [N/C]，電流を I [A]，電流密度を j [A/m^2]，圧力を p [Pa]，速度を v [m/s]，質量密度を ρ [kg/m^3]，電荷を q [C]，抵抗率を η [Ωm]，粘性を μ [Pa·s]，透磁率を μ_0 [H/m]，面積を S [m^2]，体積を V [m^3]，比熱比を γ と称す．特に断らない場合 MKS 単位系を用いる．

本論文に用いる円柱座標系を図 2.1 に示す．以下本文中ではベクトル $\vec{A}$ の R 方向成分，ϕ 方向成分，Z 方向成分をそれぞれ A_R，A_ϕ，A_Z と表し，R 方向を径方向，ϕ 方向をトロイダル方向，Z 方向を高さ方向とする．円柱座標においてトーラスは図 2.2 のように表現される．R_0 はトーラスの大半径，a は小半径を表す．図 2.2 における θ 方向をポロイダル方向，r 方向を小半径方向とする．

2.2　RFP 磁場配位 [3]

RFP 磁場配位は軸対称トーラス系に属し，プラズマ中に流すトロイダル電流 (プラズマ電流) によって生じるポロイダル磁場 B_θ(式 (2.1)) と外部トロイダル磁場によって作られるトロイダル磁場 B_ϕ との組み合わせでプラズマを閉じ込める．典型的な RFP 磁場配位における内部磁場分布を図 2.3 に示す．図 2.3 のように RFP では，トロイダル磁場の小半径方向分布はプラズマの周辺で逆転する配位になっているため，磁力線のシアーが大きい．磁気シアーとは磁力線のねじれ具合であり，大きいほうがよりねじれが多いことを示す．このような磁場配位では比較的高ベータ (プラズマ圧力と磁気圧との比) のプラズマを MHD(電磁流体力学：Magneto Hydro Dynamics) 安定に閉じ込めることができる．必要な磁気圧が小さいということは外部から与える磁場が小さくてよいことを意味し，装置の小型化につながる．また，プラズマ電流の安定条件であるクルスカル - シャフラノフの制限 [3] を超えてプラズマ電流を大きく流すことができるので，閉じ込めの比例則にもよるが，電流のジュール熱により効率よくプラズマを加熱できる可能性がある．

プラズマ電流によるポロイダル磁場の大きさ $|B_\theta|$ を式 2.1 に示す.

$$|B_\theta| = \sqrt{B_R^2 + B_Z^2} \tag{2.1}$$

安全係数 (safety factor) q とは磁力線のトーラスに沿う方向及びトーラス軸まわりの比として表されトロイダル方向に n 周に対してポロイダル方向に m 周する比として与えられる．これは軸対称系においてトロイダル磁場とポロイダル磁場及び主半径 R_0 と小半径 r に関する比で与えられるため式 (2.2) のように表される.

$$q(R,\phi,Z) = \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{(R-R_0)^2+Z^2}}{R_0}\frac{B_\phi(R,\phi,Z)}{B_\phi(R,\phi,Z)} \tag{2.2}$$

特に m, n が整数 $(m_i, n_i)_{i=0,1,2,\cdots}$ となる面では不安定性が成長しやすい．この整数比で表わされる面を有理面と呼ぶ．RFP 磁場配位ではポロイダル磁場とトロイダル磁場とが同じ程度の大きさであるので，磁力線のピッチの長さを表す安定係数 q が１よりかなり小さい.

RFP プラズマを特徴づける特性としてピンチパラメータ Θ と磁場反転パラメータ F があり以下のように定義される.

$$\Theta(R,\phi,Z) = \frac{B_\theta(R,\phi,Z)}{< B_\phi >} \tag{2.3}$$

$$F(R,\phi,Z) = \frac{B_\phi(R,\phi,Z)}{< B_\phi >} \tag{2.4}$$

Θ はトロイダル磁場の大きさとトロイダル電流の比を表し，F はトロイダル磁場とプラズマの端でのトロイダル磁場の反転比を表す.

2.3 流体方程式 [4]

圧縮性・粘性流体を対象とする.

2.3.1 連続の方程式

圧縮性流体であるため，流体の質量密度 ρ の空間変化が存在する．これにより圧縮性流体の連続の方程式は式 (2.5) により表される.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.5}$$

2.3.2 Navier-Stokes 方程式

体積 $dV = \vec{dr} \cdot \vec{dS}$ をもつ流体要素に働く力について考える．これらの流体要素には慣性力・体積力・圧力による力・粘性による力が働く．

(1) 慣性力

流体要素における外力 $\vec{F_o}$ と慣性力 $\vec{F_i}$ の釣り合いは式 (2.6) となる．

$$\vec{F_i} = \frac{D\rho\vec{v}}{Dt} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)(\rho\vec{v}) \right\} dV = \vec{F_o} \tag{2.6}$$

(2) 体積力

体積力 F_V とは流体要素に直接働く力であり重力，遠心力，電磁力などが挙げられる．それぞれの単位体積当たりの力を $\vec{f_r}$ とすると流体要素に働く力は式 (2.7) となる．

$$\vec{F_v} = \vec{f_r} dV \tag{2.7}$$

(3) 圧力勾配による力

圧力勾配による力 $\vec{F_p}$ は式 (2.8) となる．

$$\vec{F_p} = -\nabla p dV \tag{2.8}$$

(4) 粘性による力

粘性による力 $\vec{F_S}$ は式 (2.9) となる．

$$\vec{F_S} = \mu \left\{ \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) \right\} dV \tag{2.9}$$

流体要素の単位体積あたりに働く力をまとめると式 (2.10) のようにあらわすことができる．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)(\rho\vec{v}) = \vec{F_r} - \nabla p + \mu \left\{ \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) \right\} \tag{2.10}$$

これを Navier-Stokes 方程式と呼ぶ．

2.4 MHD 方程式 [3][5][6]

MHD 方程式は流体力学における基礎方程式である Navier-Stokes 方程式と連続の式と Maxwell 方程式を組み合わせた方程式である．2.3 節において，圧縮性・粘性流体における Navier-Stokes 方程式について述べた．本節ではこれを導電性のある MHD へ拡張する．

2.4.1 Maxwell 方程式 [8]

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \tag{2.11}$$

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \tag{2.12}$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \eta \vec{j} \tag{2.13}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.14}$$

2.4.2 MHD 方程式

2.3 節に示した流体方程式における体積力に電磁流体に働く力を導入する．

プラズマを MHD として考えたとき，MHD へは電磁力と重力が働く．
電磁力は式 (2.15) であらわされる．

$$\vec{F_L} dV = q\vec{E} + (\vec{j} \times \vec{B}) dV \tag{2.15}$$

重力は式 (2.16) であらわされる．

$$\vec{F_g} = \rho \vec{g} \tag{2.16}$$

一般的なプラズマにおいて，外力を評価する．プラズマは準中性であるからプラズマ内部における電場は磁力に比べ小さいと考えれ，$(\vec{j} \times \vec{B}) dV >> q\vec{E}$ である．また，プラズマの質量は軽いため重力が小さいので電磁力と比較すると，$\vec{F_L} >> \vec{F_g}$ となる．

したがって，流体要素へ働く体積力は式 (2.17) と近似できる．

$$\vec{F_o} = \vec{j} \times \vec{B} \tag{2.17}$$

式 (2.10) の体積力を起源とする項に式 (2.17) を代入すると式 (2.18) が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\nabla)(\rho\vec{v}) = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p + \mu\left\{\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec{v})\right\} \tag{2.18}$$

式 (2.18) が MHD の運動方程式である．

2.5 エネルギー方程式 [5][7]

エネルギーの連続の式について考える．加熱エネルギーを MHD の粘性による摩擦熱と MHD 中を流れる電流によるジュール熱と仮定する．摩擦熱を $\Pi : \nabla\vec{v}$，ジュール熱を ηj^2 とし，系の比エネルギー Q[J/kg] が保存するとき (断熱過程)，エネルギー方程式は式 (2.19) となる．

$$\rho\frac{dQ}{dt} = \Pi : \nabla\vec{v} + \eta j^2 \tag{2.19}$$

内部エネルギーを U とするとエネルギーの時間変化は以下の関係となる．

$$\rho\frac{dQ}{dt} = \frac{dp}{dt} + \rho\frac{dU}{dt} \tag{2.20}$$

また，$dp/dt = -p\nabla\cdot\vec{v}$ であるため，式 (2.19) に式 (2.20) の関係を代入すると式 (2.21) が導かれる．

$$\frac{\partial\rho U}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho U\vec{v}) = -p\nabla\cdot\vec{v} + \Pi : \nabla\vec{v} + \eta j^2 \tag{2.21}$$

断熱過程では次の関係が成り立つ．

$$\rho U = \frac{p}{\gamma - 1} \tag{2.22}$$

式 (2.21) に式 (2.22) を代入すると式 (2.23) のエネルギー方程式が得られる．

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla\cdot(p\vec{v}) - (\gamma - 1)(p\nabla\cdot\vec{v} - \Pi : \nabla\vec{v} - \eta j^2) \tag{2.23}$$

2.6 MHD 平衡

プラズマにおける平衡とはプラズマの特性を表すすべての巨視量が時間的に一定であることを示す．したがって MHD 平衡に関する式は式 (2.18) における $D/Dt = 0$ により得られる．

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \tag{2.24}$$

式 (2.24) は MHD に働く圧力勾配による力と電磁力が釣り合っていることを示している．

定常状態であるので式 (2.25) から (2.27) が成り立つ．

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{2.25}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.26}$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{2.27}$$

式 (2.25) から (2.27) より式 (2.29)，(2.29) が成り立つ．

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 \tag{2.28}$$

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0 \tag{2.29}$$

ある曲面の方程式を $\psi = \text{const.}$ で与えると $\vec{B}$ の力線 (磁力線) がこの面上に存在するとき，この面に垂直な $\nabla\psi$ ベクトルは $\vec{b}$ と直交するので，式 (2.30) が成り立つ．

$$\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0 \tag{2.30}$$

この式 (2.30) を満たす曲面 ψ を磁気面と呼ぶ．式 (2.29) は磁場の方向と圧力勾配が直交していることを示し，磁気面上で一定の値をとるような関数 $p(\psi)$ が存在することを示す．また，式 (2.29) は電流密度 $\vec{j}$ が磁気面に沿っていることを示し，磁気面上で一定の値をとるような関数 $I(\psi)$ が存在することを示す．

MHD 平衡方程式を応力のバランスの観点で考えると式 (2.25) を (2.24) に代入すると式 (2.31) が導かれる．

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} \left\{ (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right\} \tag{2.31}$$

$(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}$ は磁力線の曲率に基づく項であるこの項が無視できるとき (磁力線が直線であるとき) には式 (2.32) となる．

$$\nabla\left(p+\frac{B^2}{2}\right)=0 \tag{2.32}$$

式 (2.34) おいて，プラズマがない領域 ($p=0$) の磁場を B_o，プラズマ領域を B_i とすると式 (2.33) が導かれる．

$$p+\frac{B_i^2}{2\mu_0}=\frac{B_o^2}{2\mu_0} \tag{2.33}$$

この式はプラズマと磁場からなる系の圧力平衡を示している．この場合，プラズマ領域の磁場はプラズマのない領域に比べて小さい．すなわちこれはプラズマの反磁性を示している．

プラズマ圧力と外部磁気圧の比をベータ値 (β 値) と呼ぶ．β 値の定義を以下に示す．

$$\beta=\frac{p}{B_o^2/2\mu_0} \tag{2.34}$$

プラズマ閉じ込め装置では $0.1<\beta<1$ のパラメータ領域で運転するものを高 β 閉じ込め装置，$\beta<0.1$ の領域で運転するものを低 β 装置と呼ぶ．

2.7 Grad-Shafranov 方程式

Z 軸対称を仮定すると，磁束関数については式 (2.30) が成り立つが，これと式 (2.27) は $\vec{B}$ を以下のようにおけば同時に成り立つ．

$$\left(\begin{array}{ccc} B_R & B_\phi & B_Z \end{array}\right)^T=\left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial Z} & B_\phi(R,Z) & \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} \end{array}\right)^T \tag{2.35}$$

ψ は 2 次元流体の流れ関数に相当する．ψ はまた $Z=\text{const.}$ 面上の半径 R の円内を通過する磁束に比例する．したがって式 (2.35) により式 (2.36) が得られる．

$$\psi=\int_0^R B_Z dr \tag{2.36}$$

式 (2.35) から磁場 $\vec{B}$ は式 (2.37) により示される．

$$\vec{B}=\frac{1}{R}\nabla\psi\times\vec{e_\phi}+B_\phi\vec{e_\phi} \tag{2.37}$$

$\vec{e_\phi}$ はトロイダル方向の単にベクトルで $\nabla\psi/|\psi|$ に等しい．式 (2.37) の第一項はポロイダル磁場であり，第 2 項はトロイダル磁場である．

同様に表面関数 I と電流密度 $\vec{j}$ との間にも式 (2.35) に対応する式 (2.38) が成り立つ．

$$\left(\begin{array}{ccc} j_R & j_\phi & j_Z \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial Z} & j_\phi(R,Z) & \frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial R} \end{array} \right)^T \tag{2.38}$$

式 (2.25) と式 (2.38) の Z 成分を比較すると式 (2.39) が成り立つ．

$$RB_\phi = \mu_0 I \tag{2.39}$$

式 (2.25) を (2.24) に代入すると $(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \mu_0 \nabla p$ となり，各成分を式 (2.35) に代入すると以下のようになる．

$$\mu_0 \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{B_\phi}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\psi) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi}{\partial R} L\psi = 0 \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial R}\frac{\partial}{\partial Z}(RB_\phi) - \frac{\partial \psi}{\partial R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\phi) \equiv \frac{\partial(\psi, RB_\phi)}{\partial(R,Z)} = 0 \tag{2.41}$$

$$\mu_0 \frac{\partial p}{\partial Z} + B_\phi \frac{\partial}{\partial Z}(RB_\phi) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi}{\partial Z} L\psi = 0 \tag{2.42}$$

ただし L は演算子であり，式 (2.43) であらわされる．

$$L\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \tag{2.43}$$

式 (2.42) は R, Z の関数 $\psi = RB_\phi$ についてのヤコビアンが 0 であることを表し，これは式 (2.44) の必要十分条件である．

$$RB_\phi = \mu_0 I = f(\psi) \tag{2.44}$$

この結果磁気面 $\psi = \text{const.}$ の上では $I = \text{const.}$ が成り立ち，磁気面と電流面は一致する．式 (2.41) と (2.42) は式 (2.39) を用いて B_ϕ を I で置き換えることにより以下のように変形できる．

$$\mu_0 \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi}{\partial R}\left(L\psi + \mu_0^2 I \frac{\partial I}{\partial \psi} \right) = 0 \tag{2.45}$$

$$\mu_0 \frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi}{\partial Z}\left(L\psi + \mu_0^2 I \frac{\partial I}{\partial \psi} \right) = 0 \tag{2.46}$$

これらの式から括弧の項を消去すると式 (2.47) が成り立つ.

$$\frac{\partial(p,\psi)}{\partial(R,Z)} = 0 \tag{2.47}$$

このことから $p = p(\psi)$ であることが導かれる.

式 (2.24) の R 成分 $j_\phi B_Z - j_Z B_\phi = \partial p/\partial R$ に式 (2.35) の B_Z，式 (2.38) の j_Z を代入し，式 (2.39) を用いると j_ϕ は以下のように示される.

$$j_\phi = \frac{\mu_0}{2R}\frac{dI^2}{d\psi} + \frac{dp}{d\psi} \tag{2.48}$$

以上から式 (2.49) が導かれる.

$$L\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Z^2} = -\frac{\mu_0^2}{2}\frac{dI^2}{d\psi} - \mu_0 R^2\frac{dp}{d\psi} \tag{2.49}$$

式 (2.49) は ψ についての 2 つの関数 $I(\psi)$，$p(\psi)$ を含む楕円形非線形微分方程式であり，Grad-Shafranov 方程式と呼ばれている.

2.8 プラズマの緩和現象 [9]

J.B.Taylor は実験装置 ZETA において，プラズマ生成初期に不安定な状態であっても，その初期条件に依存することなくプラズマ周辺部のトロイダル磁場が逆転した安定な磁場配位が現れる結果から，RFP 配位がプラズマの緩和現象により落ち着くエネルギー最小の状態であり Bessel 関数型の磁場配位を盛ることを理論的に示した．以下にその理論の概要を示す．Taylor の理論ではプラズマは微小有限の抵抗を持っており，完全導体壁に囲まれていると仮定している．故にこのモデルでは磁束は系の中で保存される．このとき，磁気エネルギー W_m 及び磁気ヘリシティ K は以下のように定義される.

$$W_m = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV \tag{2.50}$$

$$K = \int \vec{A}\cdot\vec{B} dV \tag{2.51}$$

K は磁力線のトポロジーを表す量である．抵抗がゼロの完全導体プラズマでは W_m と K は保存量であることが示される．プラズマが有限抵抗を持てば磁力線のトポロ

ジーは変化するが，プラズマ全体としてみれば磁力線のねじれの程度はあまり変化しないと考えられる．一方，磁気エネルギーは抵抗があればジュール熱として散逸する．実際のプラズマは完全導体ではないため，平衡状態が落ち着くまでは磁力線の崩壊や再結合が起こり位相幾何学的性質は保存されない．ゆえに K は必ずしも保存されないがプラズマが完全導体により近いものであり，プラズマ全体の幾何学的形状の変化が小さいと仮定すれば，完全導体壁で囲まれたプラズマ全領域で積分された K の値は保存される．

$$K_0 = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV = \text{const.} \tag{2.52}$$

したがってプラズマが抵抗を持つ場合，K を保存しながら W_m が最低の状態へと発展していくと仮定できる．これは $K = \text{const.}$ の拘束条件のもと W_m が極値を取る条件を求める変文問題として定式化できる．λ をラグランジュの未定乗数として式 (2.53) を求めることにより最低エネルギーの緩和状態を求められる．

$$\frac{d}{dV}\{W_m - \lambda K\} = \frac{d}{dV}\left\{\int \frac{B^2}{2\mu_0} dV - \lambda \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV\right\} = 0 \tag{2.53}$$

この式 (2.53) を満たす一つの解として式 (2.54) が求められる．

$$\nabla \times \vec{B} = \lambda \vec{B} \tag{2.54}$$

Maxwell 方程式における $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ と式 (2.54) より以下の関係が得られる．

$$\mu_0 \vec{j} = \lambda \vec{B} \tag{2.55}$$

式 (2.55) は電流と磁場の向きが平行であることを示している．この関係を MHD 平衡を表す式 (2.24) に適用すると以下の関係となる．

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} = 0 \tag{2.56}$$

式 (2.56) は最小エネルギー状態においては電磁力が 0 となりプラズマに力が働かない状態 (無磁力配位：force free 配位) になることを示す．またその状態が MHD 平衡であるならばプラズマ中の圧力勾配がなくなること (空間的に平坦な分布) を示す．

2.9 (m,n) モードとフーリエ変換

空間と時間の関数である揺動磁場 $\vec{B_1}$ をトーラス座標系 (r, θ, ϕ) を用いて $B_1(r, \vec{\theta}, \phi, t)$ とあらわす．この $\vec{B_1}$ を変数 (θ, ϕ) について，2 次元フーリエ級数展開を行うと以下のように展開される．

$$\vec{B_1}(r, \theta, \phi, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\vec{c}_{(m,n)}(r, t)| \cos\{(m\theta + n\phi) + \arg(\vec{c}_{(m,n)}(r, t))\} \quad (2.57)$$

ここで，$\vec{c}_{(m,n)}$ は複素フーリエ係数であり以下で求められる．

$$\vec{c}_{(m,n)}(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{B_1}(r, \theta, \phi, t) \exp\{i(m\theta + n\phi)\} d\theta d\phi \quad (2.58)$$

式 (2.57) はポロイダル角 θ とトロイダル角 ϕ の方向に沿って位相が変化する波であり，θ, ϕ に対する波の周期は整数の組 (m, n) によって決定されている．揺動磁場 $\vec{B_1}$ はそれぞれの (m, n) に対応する波の重ね合わせと考えることができ，その構成要素としての波を「(m, n) モード」と呼ぶ．また m, n それぞれをポロイダルモード数,「トロイダルモード数」という．

r, t を固定すると (m, n) モードの等位相になっている点の集合は，$m\theta + n\phi = \text{const.}$ であらわされる螺旋である．

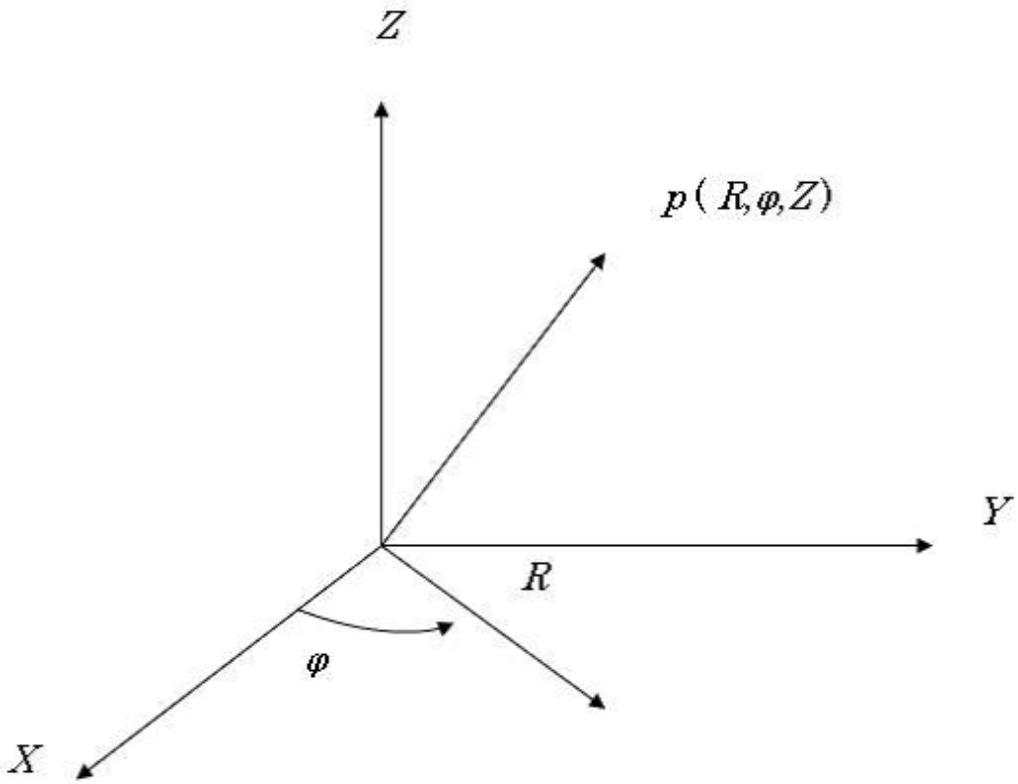
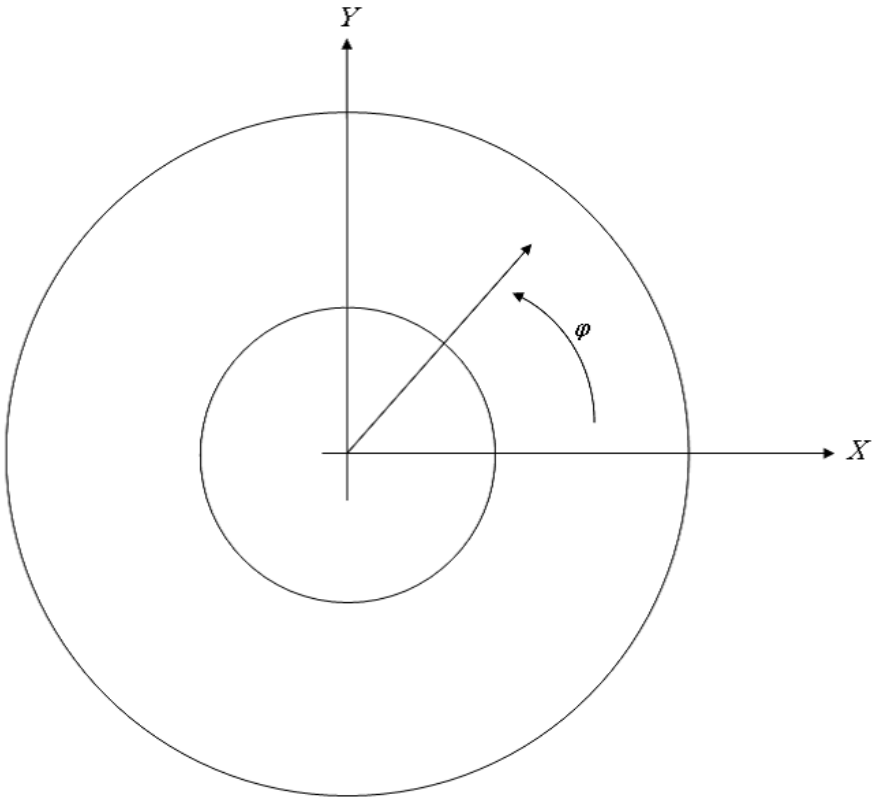
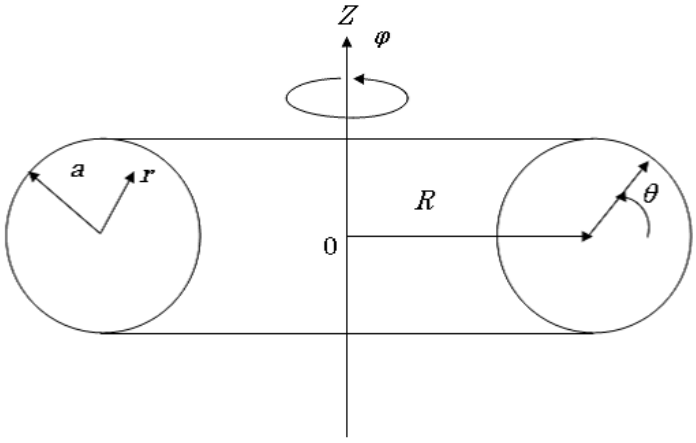


図 2.1 円柱座標系



(a) 円柱座標系における平面図



(b) 円柱座標系における正面図

図 2.2 円柱座標系におけるトーラス系

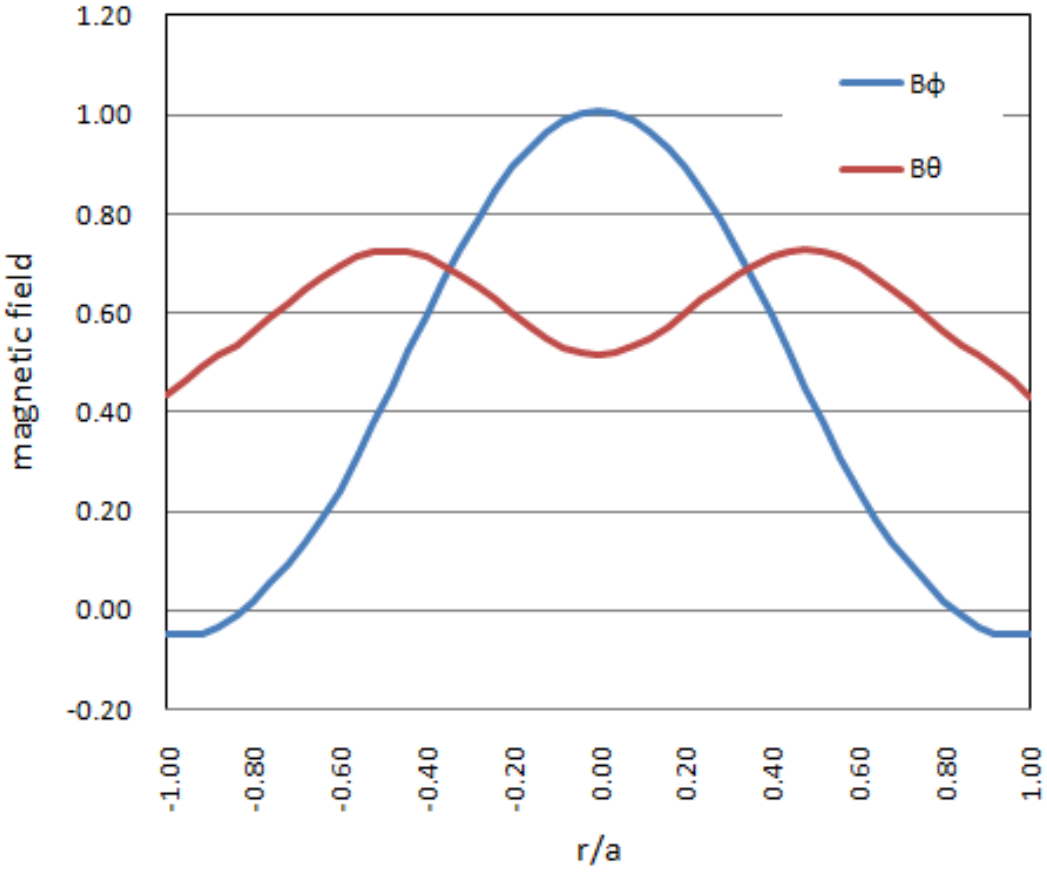


図 2.3 RFP 磁場配位におけるトロイダル磁場とポロイダル磁場の小半径方向分布

第 3章　MHDシミュレーションモデル

3.1　実験装置“ RELAX ”

シミュレーションモデルの対象である実験装置はプラズマ基礎工学研究室が所有する実験装置“ RELAX(REversed field pinch of Low Aspect ratio eXperimant) ”である.“ RELAX ”は円形断面をもつRFP実験装置であり，大半径が0.5[m]，小半径が0.25[m]であるためアスペクト比が2のトーラス型の実験装置である．RELAXプラズマはステンレス鋼の真空容器の中に保持される．プラズマ領域と真空領域の区別はなく，プラズマ領域は有限抵抗を持つ抵抗性壁により囲まれている．

3.2　シミュレーションの座標系

シミュレーションにおける座標系の概形を図3.1に示す．この図に示すように座標系は円柱座標系(R, ϕ, Z)を用いている．図中の円形断面を持つトーラスがシミュレーションの対象となるRFPプラズマである．正方形断面を持つ構造物は計算領域の境界壁であり，境界壁とプラズマの間は真空状態を模擬している．プラズマと境界壁との相互作用を抑えるために空間を設けている．図3.1におけるプラズマ領域と計算領域を表4.1，3.2に示す．格子数は表3.2の通りであるから(R, ϕ, Z)に対する空間格子の間隔$(\delta R, \delta\phi, \delta Z)$は表3.3のように示される．表4.1に示されるようにプラズマ領域の大半径と小半径の比であるアスペクト比は２である．

3.3　シミュレーションの基礎方程式

3.3.1　基礎方程式

MHD方程式は2章において示したが，MHDシミュレーションの基礎方程式を以下に示す.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) = -(\vec{v} \cdot \nabla)(\rho \vec{v}) + \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p + \mu \left\{ \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right\} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \tag{3.3}$$

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{B} \tag{3.4}$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \eta \vec{j} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot (p \vec{v}) - (\gamma - 1)(p \nabla \cdot \vec{v} - \Phi - \eta j^2) \tag{3.6}$$

$$\Phi = 2\mu \left\{ e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \vec{v})^2 \right\} \tag{3.7}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{3.8}$$

3.3.2 規格化 [10]

2 章において示した MHD 方程式における物理量はある次元の単位を持っており，それらの乗数が異なることが多い．これは浮動小数点の位置が大きく異なることを意味し，丸め誤差が大きくなる原因となる．これを防ぐために物理量の規格化を行い無次元化する．規格化には初期平衡配位での磁場 $\vec{B_0}$ を用いる．典型的な初期平衡配位では磁気軸におけるトロイダル磁場は $B_{0\phi} = 0.1[\mathrm{T}]$ の値を持ため，磁場を以下のように規格化する．

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{B_{0\phi}} \vec{B_0} \tag{3.9}$$

圧力 p は 2.6 節における β を用い規格化する．

$$p = \frac{p_0}{B_{0\phi}^2 / 2} \tag{3.10}$$

式 (3.9) により電流密度は以下のように規格化される.

$$\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\vec{j_0} \tag{3.11}$$

シミュレーションにおける時間の単位として，アルフベン通過時間 τ_A を用いる．アルフベン通過時間とはスケール長をアルフベン速度 v_A で除したものである．アルフベン速度とはプラズマ中を伝搬する代表的な波の速度を表す．アルフベン速度は以下により定義される [3].

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}} \tag{3.12}$$

スケール長として，実験装置の大半径 R_0 を用いると，アルフベン通過時間 τ_A は以下により求められる.

$$\tau_A = \frac{R_0}{v_A} \tag{3.13}$$

これにより時間は以下のように規格化される.

$$t = \frac{t_0}{\tau_A} \tag{3.14}$$

また抵抗による磁場の拡散時間 (抵抗性表皮時間)τ_R は抵抗率 η とアルフベン通過時間により定義できる.

$$\tau_R = \eta^{-1}\tau_A \tag{3.15}$$

シミュレーションにおけるスケール長を $L = 1$，質量密度 $\rho = 1$ と仮定すると，速度 v はアルフベン速度によって与えられるため以下のように表される.

$$v = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho}} = B_0 \tag{3.16}$$

MHD 方程式に含まれる抵抗率 η や粘性定数 μ は時間的・空間的に一定とする.

実験装置“ RELAX ”における上記の典型的なパラメータを表 3.4 に示す.

3.4 シミュレーション手順

本論文では式 (3.2)〜(3.2) を数値的に解くことにより，シミュレーションを行っている．この節では計算手順の概要を説明する．このシミュレーションでは多変数であり，なおかつ 3.2 節に示したように多数の格子数を持つため，計算量は莫大なものと

なる．故にこれらを計算するために強力な計算機を用いている．このシミュレーションの計算には自然科学研究機構核融合科学研究所シミュレーション科学研究部が所有するLHD数値解析システムを用いている[12]．LHD数値解析システムの演算サーバはNEC SX-8/32M4により構成され総メモリ数512GB，総合処理速度512GFlopsの性能を持つ．このシミュレーションでは2.38GBのメモリ数を使用し，1回あたり20時間程度必要とする．

3.4.1 空間差分[11]

MHD方程式は式(3.2)〜(3.2)に示したように，偏微分方程式により表される．これらを有限差分法を用いて空間微分の計算を行っている．関数fのある空間軸xにおける点x_iでの一次導関数は式(3.17)により得られる．

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \frac{1}{12\delta x}(-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}) \tag{3.17}$$

式(3.17)を用いると4次精度の導関数を得ることができる．また，境界壁付近では式(3.17)では計算できないため式(3.18)を用いる．

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \frac{1}{2\delta x}(f_{i+1} - f_{i-1}) \tag{3.18}$$

式(3.18)を用いると2次精度の導関数を得ることができる．境界壁では式(3.19)を用いる．

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \frac{1}{\delta x}(f_{i+1} - f_i) \tag{3.19}$$

式(3.19)を用いると1次精度の導関数を得ることができる．

3.4.2 時間積分[11]

時間積分には4次精度Runge-Kutta法を用いる．独立変数である$(\rho, \vec{v}, \vec{B}, p)$を$\vec{y}$により表し，式(3.2)〜(3.2)における右辺を$\vec{g}(\vec{y})$とすると，ある時間ステップ$n+1$

における時間積分は式 (3.20) を計算することにより得られる．

$$\vec{y^{n+1}} = \vec{y^n} + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \tag{3.20}$$

$$\vec{k}_1 = \delta t \vec{g}\left(\vec{y^n}\right) \tag{3.21}$$

$$\vec{k}_2 = \delta t \vec{g}\left(\vec{y^n} + \frac{\vec{k}_1}{2}\right) \tag{3.22}$$

$$\vec{k}_3 = \delta t \vec{g}\left(\vec{y^n} + \frac{\vec{k}_2}{2}\right) \tag{3.23}$$

$$\vec{k}_4 = \delta t \vec{g}\left(\vec{y^n} + \vec{k}_3\right) \tag{3.24}$$

ここで δt は時間ステップの刻み幅である．

3.5 平衡配位

平衡再構成コードである“ RELAXfit ”を用い，平衡配位を求めている [13]．この“ RELAXfit ”は式 (2.49) に示した Grad-Shafranov 方程式を数値的に求める計算コードであり，適切な $I(\psi), p(\psi)$ を設定し計算することにより，実験結果と矛盾しない平衡配位を求められる．この“ RELAXfit ”により求められた平衡配位により，実験装置における RELAX プラズマの各種解析を行っている．シミュレーションにはこの“ RELAXfit ”を用い，平衡配位を求めている．“ RELAXfit ”により求められた二次元関数である磁気面関数 $\psi(R, Z)$ や圧力 $p_{GS}(R, Z)$ を用い，式 (2.37) により磁場 $\vec{B}_{GS}(R, Z)$ が得られる．

3.6 境界条件と初期条件

3.6.1 境界条件

図 3.1 に示したように，シミュレーションには内面と外面と上面と下面に境界壁が存在している．実際の実験装置ではプラズマと壁が接近しているため，プラズマと壁との相互作用が存在する．しかし，この壁との相互作用はプラズマの安定化や

不安定化を含む複雑な機構が存在しているため本研究の目的であるから外れ，また用いているシミュレーションモデルでは扱うことができない現象を含む．そのためこのシミュレーションでは簡単のために境界条件を以下のようにする．

$$\vec{B_\perp} = \text{const.} \tag{3.25}$$

$$\vec{j} = 0 \tag{3.26}$$

$$\vec{v} = 0 \tag{3.27}$$

実験装置では境界より内側ではプラズマが満たしており，境界の内側に真空領域はない．しかしながらシミュレーション領域において簡単のために真空領域を設けている．本来であれば真空領域では $\vec{v} = \vec{0}, \vec{j} = \vec{0}$ であるべきだか，式 (3.2)〜式 (3.8) に示される MHD 方程式は偏微分方程式であるため，境界での値と境界の内側での値が非連続的になるとその位置での傾きが増大し，計算へ悪影響を与える．そのため初期におけるプラズマの真空領域は式 (3.28) のような関数を $\vec{v}, \vec{j}$ に対して与える．

$$f(R,Z) = \begin{cases} 1 & (0.24 < R < 1.5) \wedge (-0.5 < Z < 0.5) \\ \exp\left[(R-1)^2 + Z^2\right] & (R < 0.24, R > 1.5) \wedge (Z < -0.5, Z > 0.5) \end{cases} \tag{3.28}$$

3.6.2 初期条件

初期平衡配位は 3.5 節に示した方法で求めるが，これは 1 断面の分布でしかないため ϕ 方向へ拡張する．

$$\vec{B}(R,\phi,Z) = \vec{B}_{GS}(R,Z) \tag{3.29}$$

また真空領域では圧力 p 0であるが，圧力が 0 であると計算できない恐れがあるため全領域の圧力に偏差 p_{vac} を加える．

$$p(R,\phi,Z) = p_{GS}(R,Z) + p_{vac} \tag{3.30}$$

この操作は $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$ であるため，平衡には影響を与えない．

実際のプラズマでは様々な要因によって不安定性が成長し，緩和していると考えられている．しかしながら平衡再構成で得られる配位は平衡配位の計算であり，不

安性の原因を定量的に評価することは極めて難しい．このシミュレーションはMHDの振る舞いを対象に行う．特定の不安定性による影響を避けるために，シミュレーション開始時に式 (3.31) 人工的に白色雑音を $\vec{v}$ へ加える．

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{64} \vec{A}_n(R, Z) \sin[n\theta + \zeta_n(R, Z)] \tag{3.31}$$

$$-4.0 \times 10^{-5} \leq \vec{A}_n \leq -4.0 \times 10^{-5} \tag{3.32}$$

$$0 \leq \zeta_n(R, Z) \leq 2\pi \tag{3.33}$$

表3.1 プラズマ領域

座標	最小値	最大値
R	0.5	1.5
ϕ	0	2π
Z	-0.5	0.5

表3.2 シミュレーション領域

座標	最小値	最大値	格子数
R	0.240	1.76	153
ϕ	0	2π	128
Z	-0.760	0.760	153

表3.3 空間メッシュの長さ

δR	$\delta\phi$	δZ	$R\delta\phi$
0.01	0.049	0.01	0.118 ～ 0.864

表 3.4 実験装置"RELAX"におけるパラメータ

大半径 R_0	0.51	[m]
小半径 a	0.25	[m]
アスペクト比	2.0	$[R_0/a]$
磁気軸におけるトロイダル磁場 $B_{0\phi}$	0.1	[T]
プラズマ質量密度 ρ	1.7×10^{-8}	$[\mathrm{kg/m^3}]$
アルフベン速度 v_A	6.9×10^5	[m/s]
アルフベン通過時間 τ_A	0.72	$[\mu\mathrm{s}]$

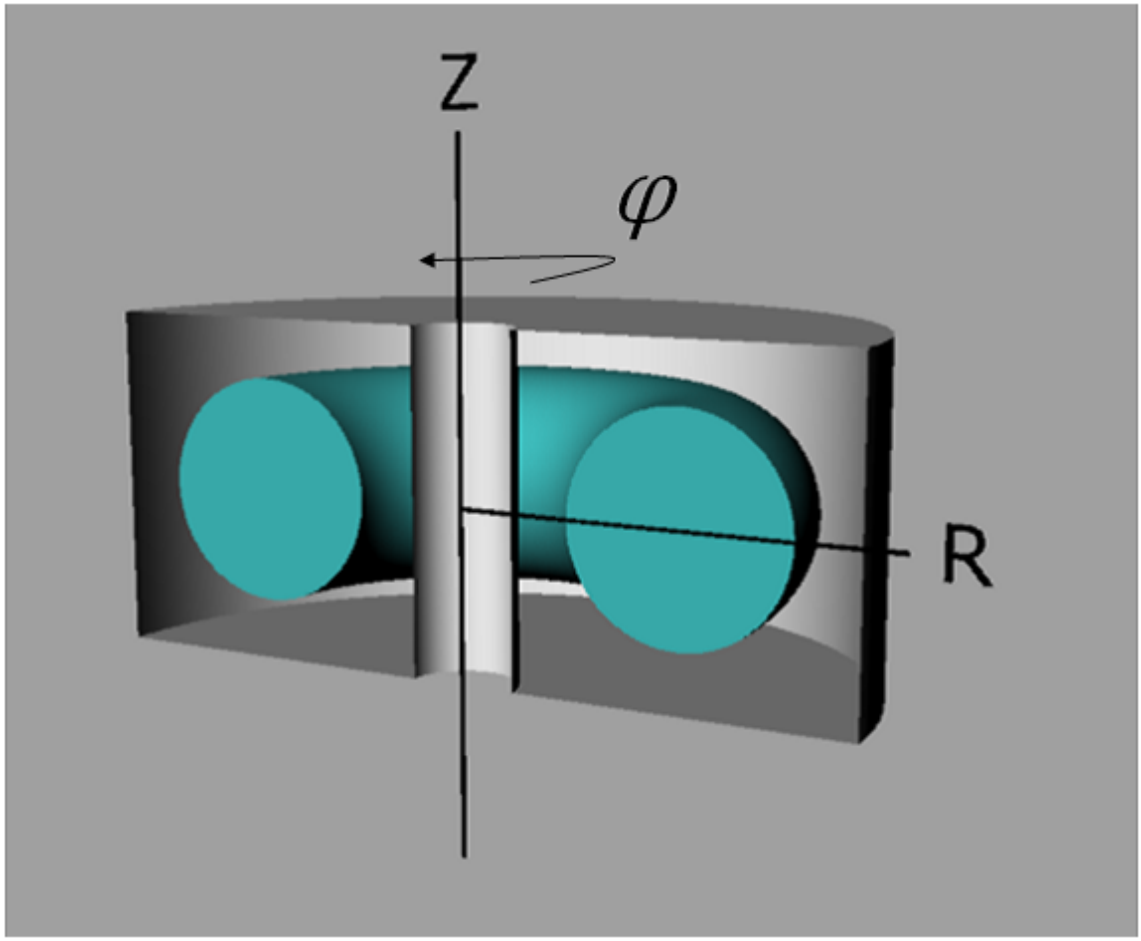


図 3.1 シミュレーションにおける座標系

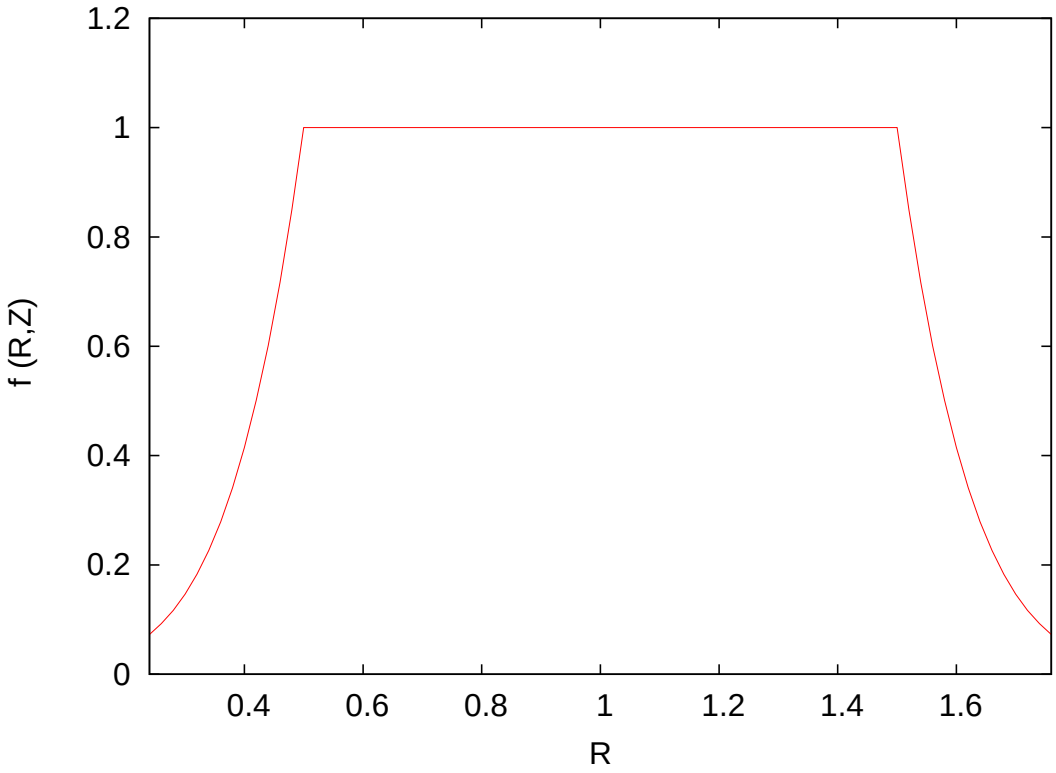


図 3.2 窓関数 $f(R, Z)$

第 4章　シミュレーション結果

4.1　典型的な RFP 磁場配位におけるシミュレーション結果

4.1.1　初期条件

図 4.1 にシミュレーションの初期配位を示す．左の縦軸は磁場を表し，右の縦軸は圧力を表し，横軸は Z 方向の位置を表す．3.3.2 節において示した方法により，磁場と圧力について規格化を行っている．この初期配位を用いてシミュレーションを行った．$\eta = 10^{-4}$，$\mu = 10^{-4}$ を用いた．この初期配位の F,Θ を以下に示す．

$$F = -0.209$$

$$\Theta = 1.92$$

4.1.2　初期配位 $F = -0.209$,$\Theta = 1.92$ における結果

図 4.2 にシミュレーションの全領域における磁気エネルギーと圧力エネルギーと運動エネルギーの時間発展を示す．縦軸は系の全領域での磁気エネルギーや圧力エネルギーや運動エネルギーの総和を表し，横軸は時間を表している．運動エネルギーの図において，初期に与えた運動エネルギーが $t > 150[\tau_A]$ ではゼロに漸近していることからよりシミュレーションが定常状態に緩和したと言える．圧力エネルギーが上昇は磁気エネルギーが内部の抵抗によりジュール熱へ変換され，それエネルギーが圧力エネルギーへ移動していることを示している．以後 $t < 150[\tau_A]$ を緩和過程，$t > 150[\tau_A]$ を定常過程と称す．

図 4.3 に位置 $(R, Z) = (1, 0)$ における各変数の時間発展を示す．横軸は時間を表し，(a)(b) における縦軸は磁場，(c)(d) における縦軸は流速，(e) における縦軸は圧力を表す．磁場はプラズマの持つ抵抗により減衰している．プラズマの流速が緩和過程で大きな値を持ちその後ゼロに漸近している．圧力はポロイダル流のピークの時間まで増加した後急激に減衰する．

図 4.4 に R-Z 平面であるポロイダル断面における圧力分布の時間発展を示す．図において縦軸は Z 方向の位置を表し，横軸は R 方向の位置を表し，カラーマップは

位置 (R, Z) における圧力の大きさを表す．この図から $t = 60[\tau_A]$ まで初期の圧力分布を保ったまま，全体の圧力が高くなっている．$t = 70[\tau_A]$ では 4.3 の (e) に見られるように形状に変化がある．$t = 74[\tau_A]$ では外側の一部の圧力が下がり，$t = 76[\tau_A]$ ではその影響が中心へ及んでいる．$t = 78[\tau_A]$ では外側の圧力は上昇しているが，中心は低いままである．$t > 90[\tau_A]$ では全体として平坦な分布になり，また領域全体に広がっていく．

図 4.5 は図 3.1 の Z=0 の X-Y 平面上における圧力分布の時間発展を示す．図において縦軸は Y 方向の位置を表し，横軸は X 方向の位置を表し，カラーマップは位置 (X, Y) における圧力の大きさを表す．$(X, Y) = (0, 0)$ は図 3.1 における Z 軸である．この図から $t = 60[\tau_A]$ まで Z 軸対称の圧力分布を示しながら，全体の圧力が高くなっていく．$t = 70[\tau_A]$ では 4.3 の (f) に見られるように形状に変化があり，トロイダル方向へ強弱を繰り返す．これは図 4.4(f) で示された分布がトロイダル方向へ一周するときポロイダル方向へ 4 回転することを示している．$t = 74[\tau_A]$ では外側の一部の圧力が下がり，$t = 76[\tau_A]$ ではその影響が中心へ及んでいる．$t = 78[\tau_A]$ では外側の圧力は上昇しているが，中心は低いままである．$t > 90[\tau_A]$ では全体として平坦な分布になり，また領域全体に広がっていく．図 4.6 に R-Z 平面であるポロイダル断面におけるトロイダル磁場分布の時間発展を示す．図において縦軸は Z 方向の位置を表し，横軸は R 方向の位置を表し，カラーマップは位置 (R, Z) における磁場の大きさを表す．この図から時間とともにトロイダル磁場が小さくなっている．これはプラズマの抵抗による拡散である．$t \leq 60[\tau_A]$ の範囲では，形状に変化なく拡散していく．$t = 70[\tau_A]$ において断面形状の一部に変化がある．$t = 74[\tau_A]$ において中心の磁場は大きくなり周辺の磁場は小さくなっている．これはポロイダル電流が中心部では強める方向に流れ，周辺部では弱める方向に流れているためである．また周辺部の一部だけ磁場が強くなる．この形状が $t \leq 80[\tau_A]$ まで続いている．$80 \leq t[\tau_A]$ 以降では一定の形状を保ったまま減衰している．

図 4.7 は図 3.1 の Z=0 の X-Y 平面上におけるトロイダル磁場分布の時間発展を示す．図において縦軸は Y 方向の位置を表し，横軸は X 方向の位置を表し，カラーマップは位置 (X, Y) における磁場の大きさを表す．図中の $(X, Y) = (0, 0)$ は図 3.1 における Z 軸であり，水色の線はトロイダル磁場がゼロである反転面である．$t \leq 60[\tau_A]$ において磁場分布は Z 軸対称の分布をしているが，$t = 70[\tau_A]$ において反転面に形

状の変化があり，四角形に変形している．$70 < t < 80[\tau_A]$ において，トロイダル方向の四か所での磁場が増加している．これは図 4.6 における磁場の変化に対応しているものであり，ポロイダル電流の分布の偏りにより引き起こされたものである．$100 \leq t[\tau_A]$ 以降では一定の変形した形状を保ったまま減衰している．

図 4.8 に磁気エネルギーのモードスペクトルの時間発展を示す．これは系全体の磁気エネルギー (B_R^2, B_ϕ^2, B_Z^2) をトロイダル方向についてフーリエ展開したものであり，この大きさは磁場分布のモード変形の度合いを示すものである．縦軸はそれぞれのモードにおける磁気エネルギーの大きさを表し，横軸は時間を表している．図 4.8 から分かるように初期に $\vec{v}$ 加えた揺動が $\vec{B}$ へ伝搬し，それらが成長している．シミュレーションの開始直後から $n = 4$，$n = 5$ モードが立ち上がり成長している．$n = 4$ モードは $t = 75[\tau_A]$ まで成長し続けその後飽和し，減少段階へと遷移している．時間とともに $n = 8$ モードの立ち上がり，定常領域では $n = 4$ モードに次ぐ大きさとなり，減少段階へと遷移している．$n = 5$ モードは時間とともに高い成長を示すが飽和領域では $n = 4, 8$ モードを除く他のモードとほぼ同じ大きさとなる．

4.2 パラメータ依存性

4.1 節と同じ初期平衡配位を用い，MHD 方程式における抵抗 η, 粘性 μ を変更し，これらのパラメータの依存性についてシミュレーションを行った．図 4.9 に $\eta = 1 \times 10^{-5}$ を用いた時の磁気エネルギーのモードスペクトルの時間発展を示す．図に示す通り，モードエネルギーの成長時間が 4.1 節と比べ長い．これはこの磁場配位が η に対しての依存性を持っていることを示す．図 4.9 に示した磁気エネルギーの発展の様子は図 4.8 の形状に酷似しているが，$n = 5$ モードの振る舞いが異なる．図 4.8 では $n = 5$ モードは $n = 4, 8$ 以外のモードと同じような振幅で飽和しているが，図 4.9 では飽和せず成長し続けている．これは $n = 5$ モードはプラズマ抵抗が高いときには安定であるが，抵抗が低くなったときに成長すること示している．図 4.10 に $\mu = 1 \times 10^{-3}$ を用いた時の磁気エネルギーのモードスペクトルの時間発展を示し，図 4.11 に $\mu = 5 \times 10^{-4}$ を用いた時の磁気エネルギーのモードスペクトルの時間発展を示す．図 4.8 に比べ，粘性が高いとき磁気エネルギーの成長時間は長い．また，$n = 4, 8$ モード以外の振幅は極端に小さい．

4.3 $F-\Theta$ 依存性

様々な初期の平衡解に対してシミュレーションを行った．初期の平衡解は図 4.12 を取る平衡を用いた．図 4.12 に示される $F-\Theta$ 領域は実験装置 RELAX における放電領域を再現している．図 4.13〜4.19 に初期配位における径方向の安全係数分布 $q(R)$ 分布を示す．初期配位 A,B,C,D では安全係数分布が示すように 2 章で示した $q=m/n=1/4$ が存在し，ポロイダル数 $m=1$ モード，トロイダル数 $n=4$ モードの有理面が存在することを表している．図 4.20〜4.25 の磁気エネルギーのトロイダルモードの時間発展に示すように，異なる初期平衡においても 4.1 節に示した定常状態へ緩和した．トロイダルモードの成長の振る舞いは配位によって異なるが，$n=4$ モードの高い成長がある．$0.0 \leq F$ の領域では $n=4$ モードの振幅は依然として大きいが，$n=3$ モードの成長が見られる．特に平衡配位 B では $n=3$ モードが支配モードとなった．$-0.4 \leq F \leq 0.0$ の領域では $n=4$ モードの振幅が際立って大きい．$F \leq -0.65$ の領域では $n=4$ モードの振幅は依然として大きいが，$n=5$ モードの成長が見られる．

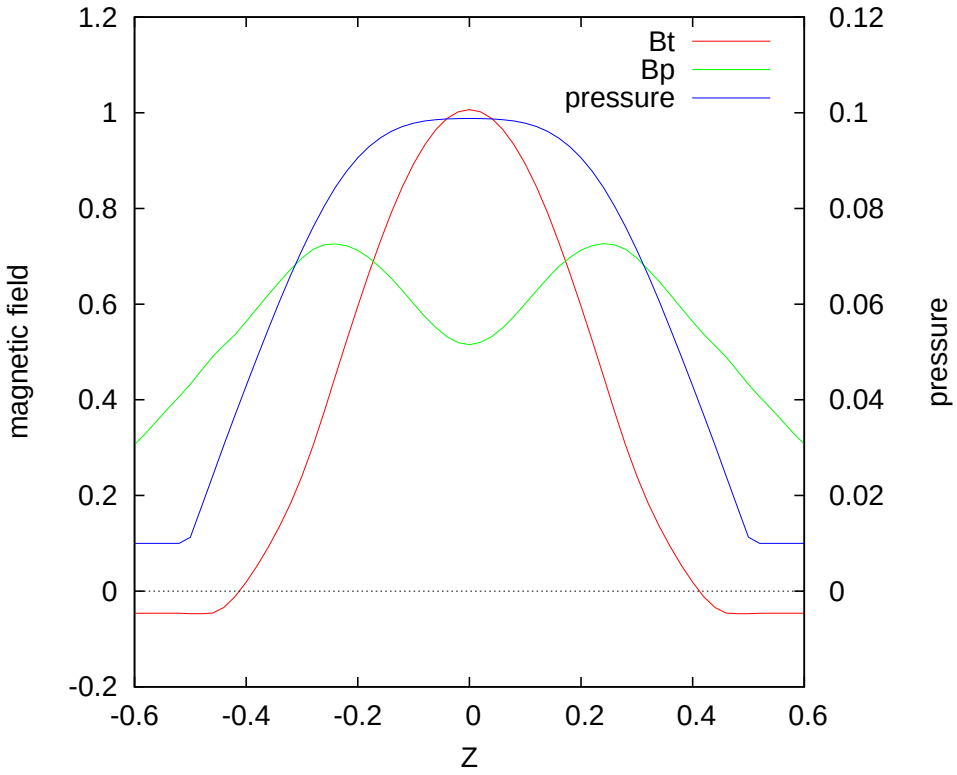


図 4.1 初期の磁場と圧力の分布

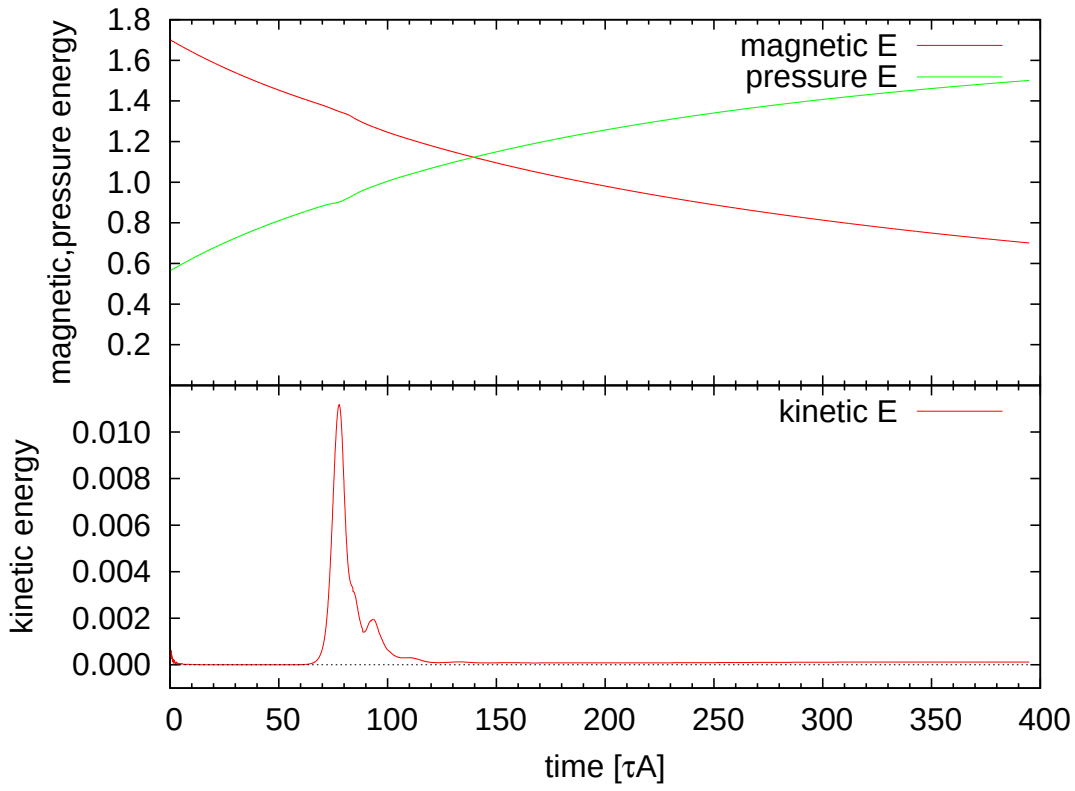
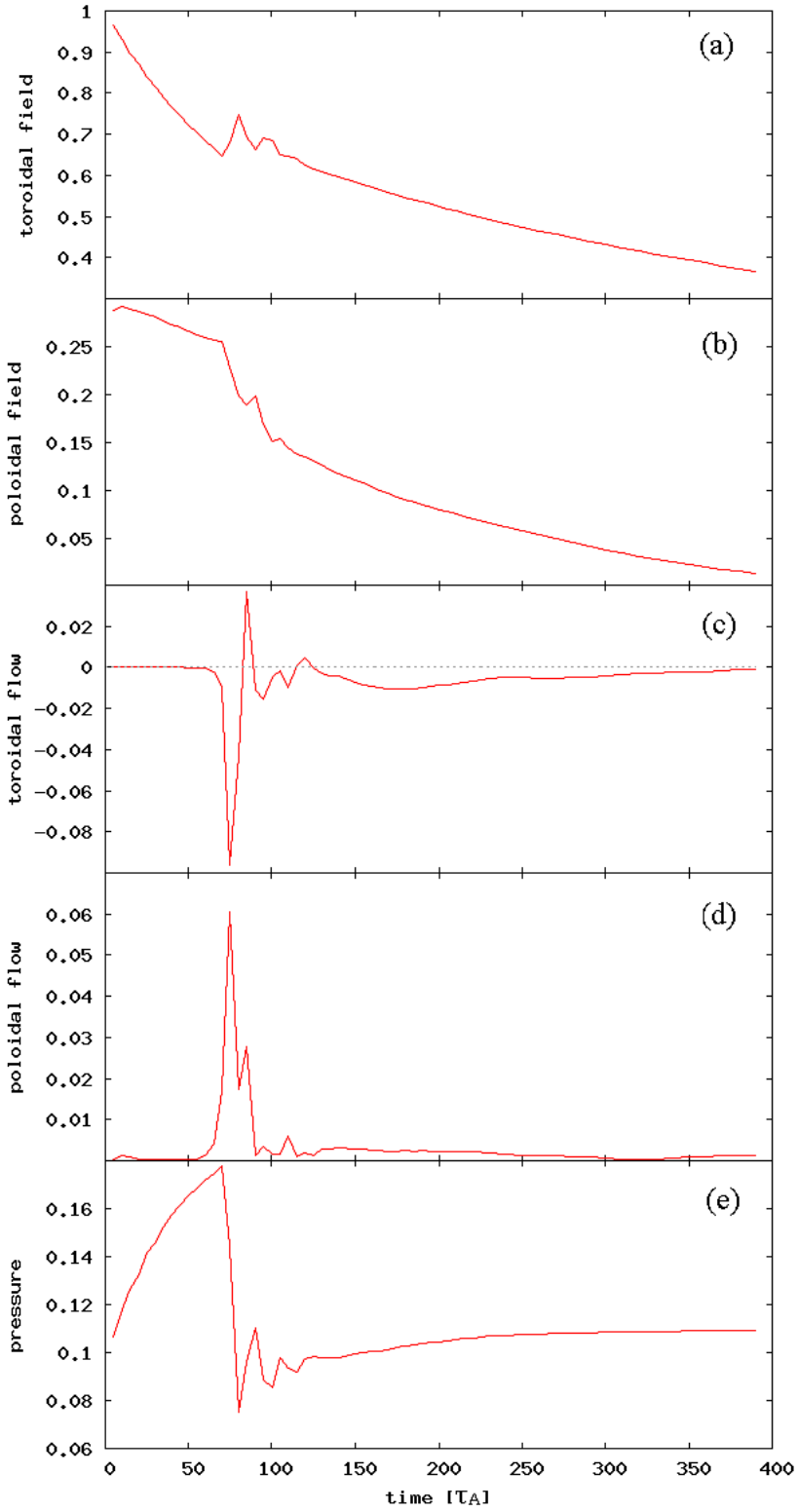
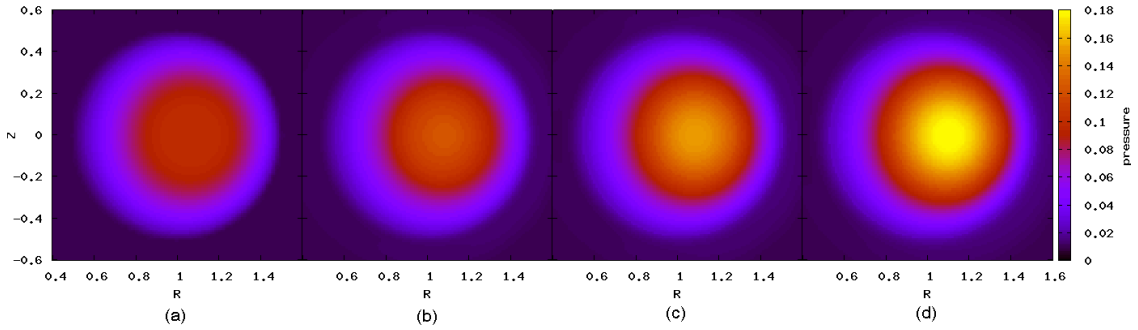


図 4.2 系全体の磁場と圧力と運動エネルギーの時間発展

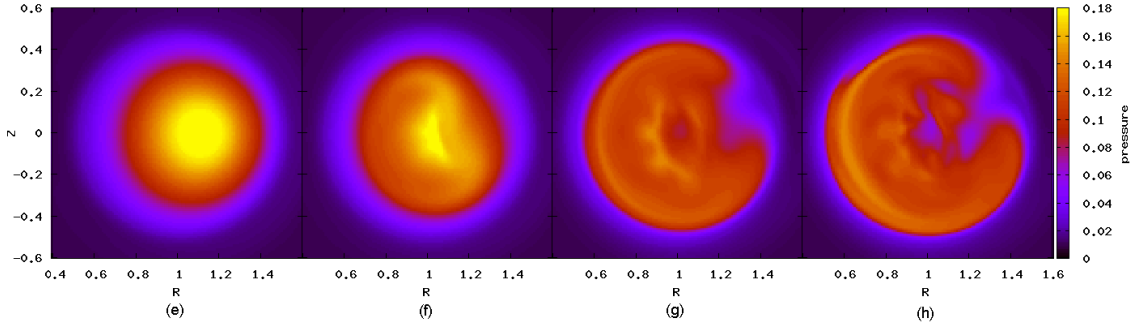


(a) トロイダル磁場 (b) ポロイダル磁場 (c) トロイダル流 (d) ポロイダル流 (e) 圧力

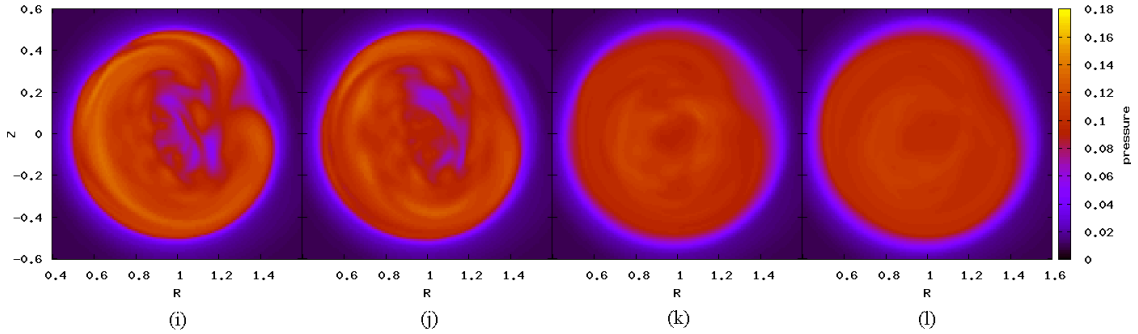
図 4.3 R=1,Z=0 における各種変数の時間発展



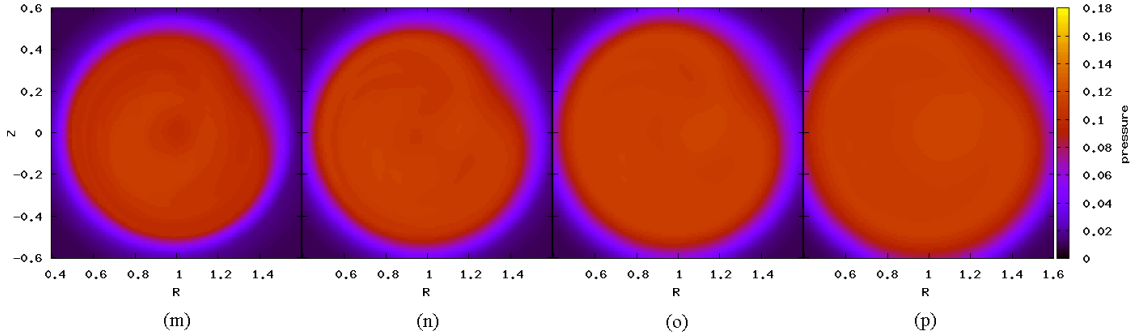
(a)t=0τ_A (b)t=10τ_A (c)t=25τ_A (d)t=50τ_A



(e)t=60τ_A (f)t=70τ_A (g)t=74τ_A (h)t=76τ_A

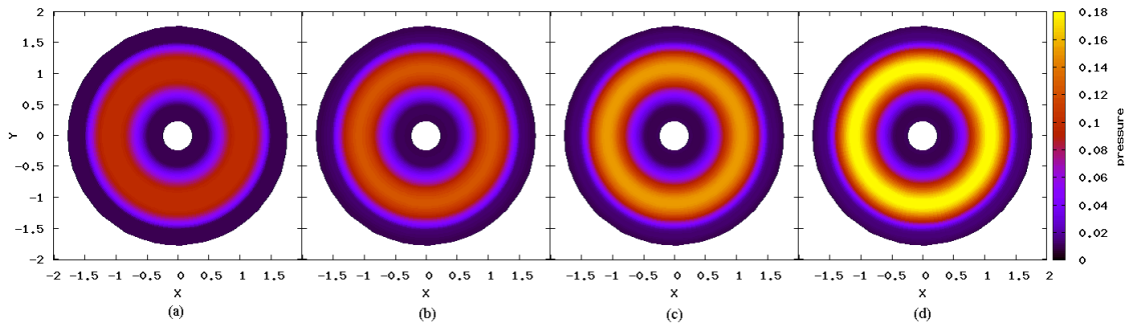


(i)t=78τ_A (j)t=80τ_A (k)t=90τ_A (l)t=100τ_A

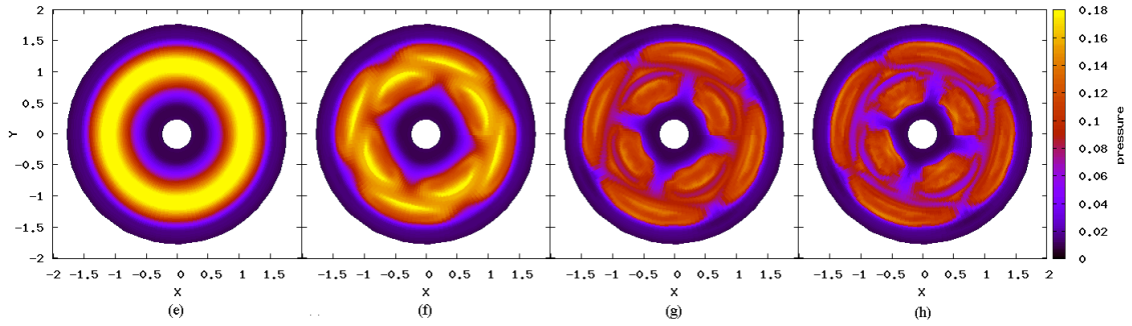


(m)t=110τ_A (n)t=150τ_A (o)t=200τ_A (p)t=300τ_A

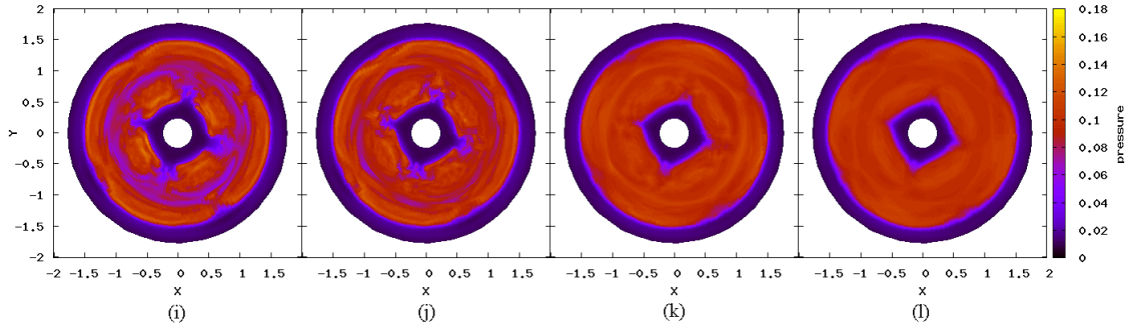
図 4.4 ポロイダル断面における圧力分布



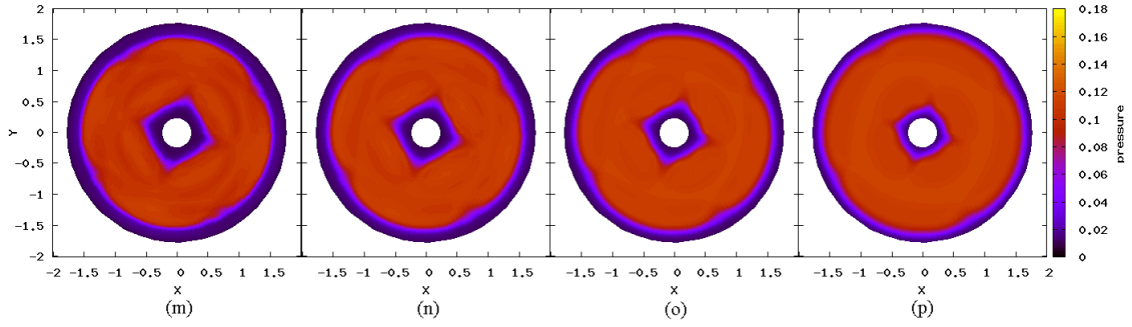
(a)t=0τ_A (b)t=10τ_A (c)t=25τ_A (d)t=50τ_A



(e)t=60τ_A (f)t=70τ_A (g)t=74τ_A (h)t=76τ_A

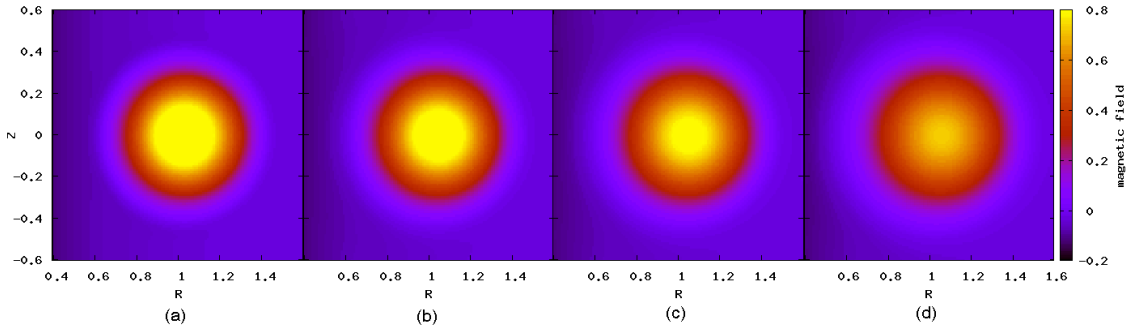


(i)t=78τ_A (j)t=80τ_A (k)t=90τ_A (l)t=100τ_A

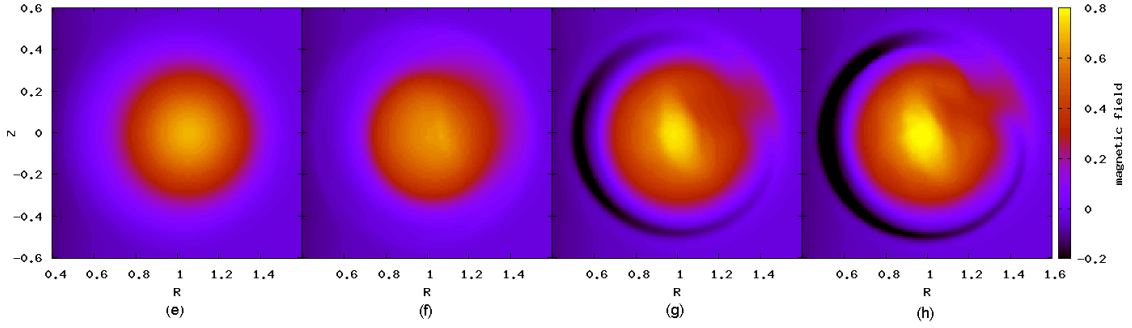


(m)t=110τ_A (n)t=150τ_A (o)t=200τ_A (p)t=300τ_A

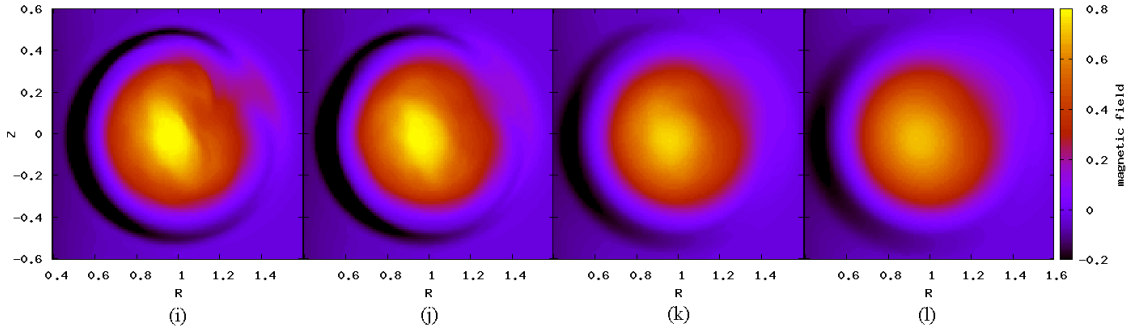
図 4.5 Z=0 の X-Y 平面上における圧力分布



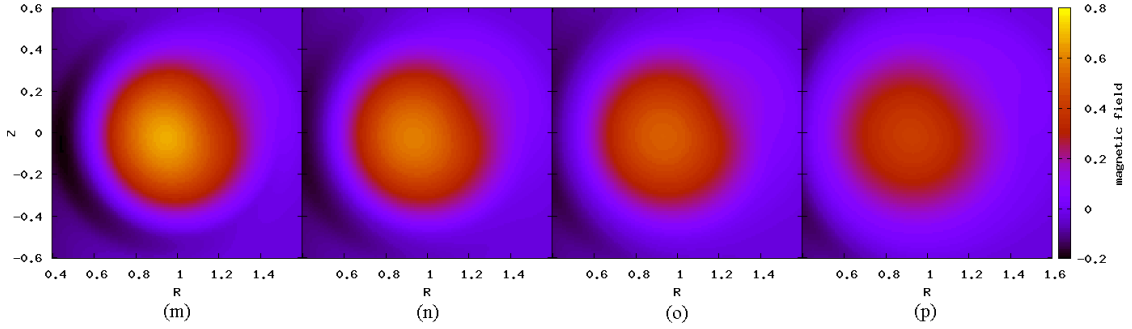
(a)t=0τ_A (b)t=10τ_A (c)t=25τ_A (d)t=50τ_A



(e)t=60τ_A (f)t=70τ_A (g)t=74τ_A (h)t=76τ_A

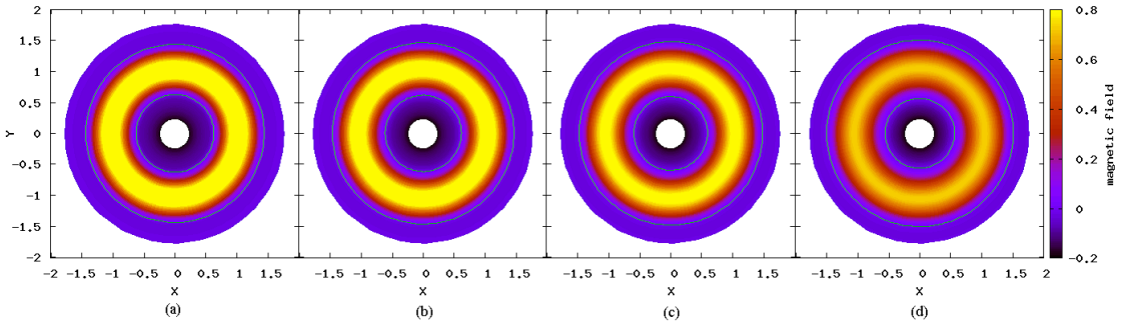


(i)t=78τ_A (j)t=80τ_A (k)t=90τ_A (l)t=100τ_A

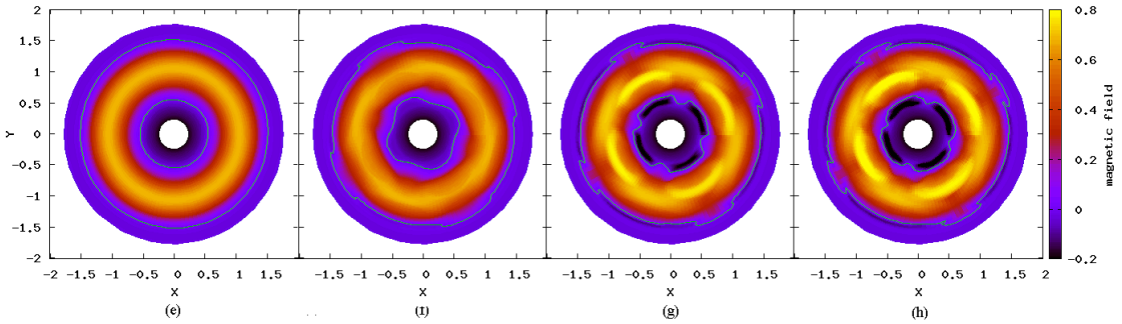


(m)t=110τ_A (n)t=150τ_A (o)t=200τ_A (p)t=300τ_A

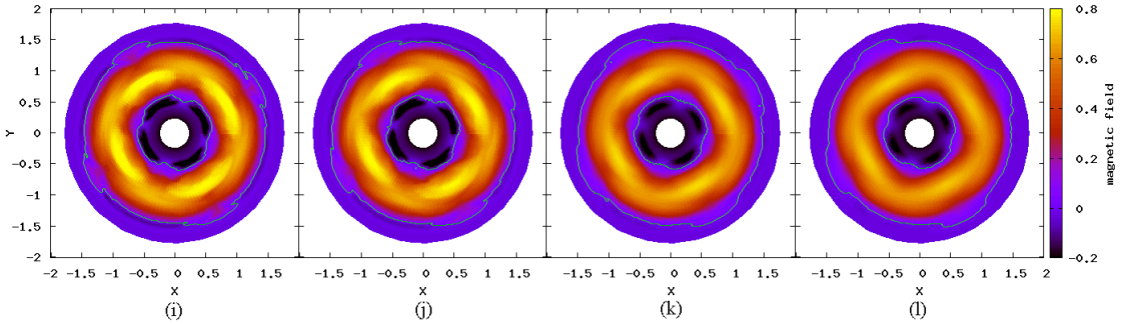
図 4.6 ポロイダル断面におけるトロイダル磁場分布



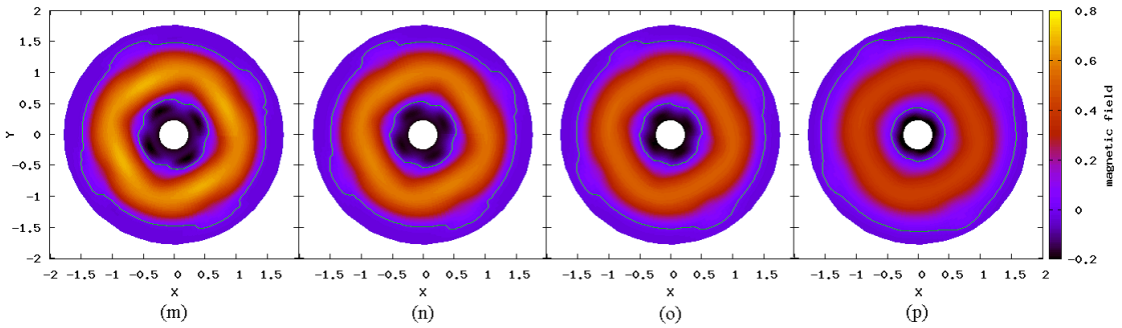
(a)t=0τ_A (b)t=10τ_A (c)t=25τ_A (d)t=50τ_A



(e)t=60τ_A (f)t=70τ_A (g)t=74τ_A (h)t=76τ_A

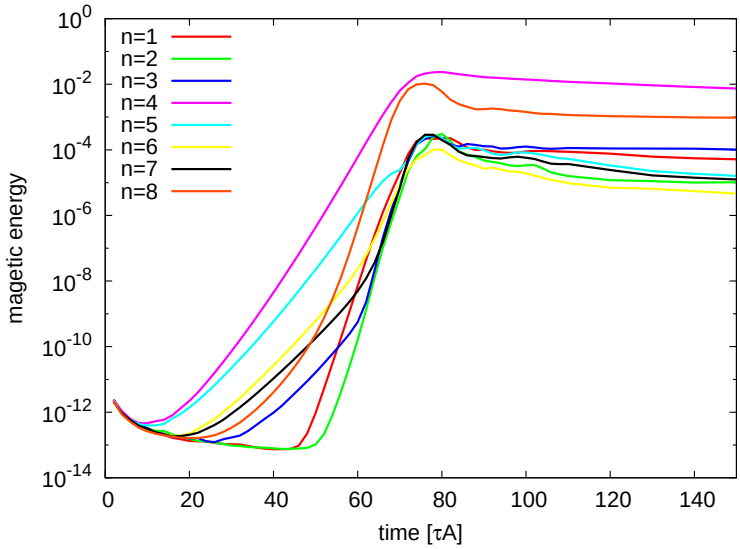


(i)t=78τ_A (j)t=80τ_A (k)t=90τ_A (l)t=100τ_A

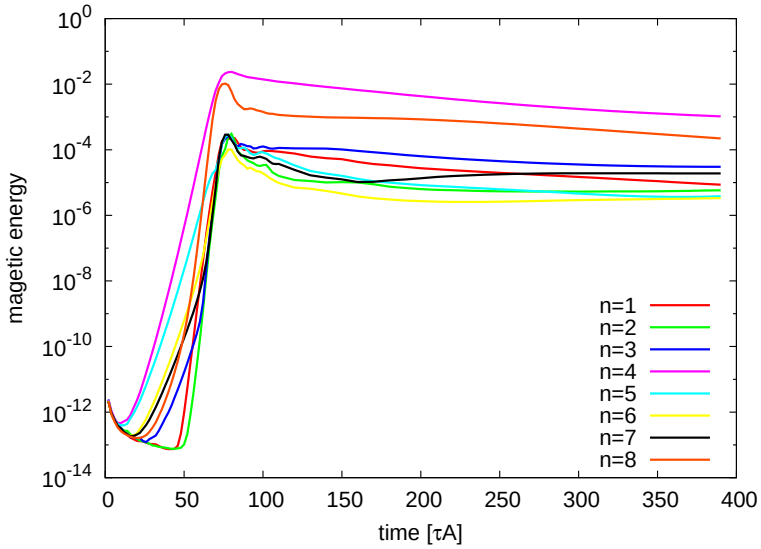


(m)t=110τ_A (n)t=150τ_A (o)t=200τ_A (p)t=300τ_A

図 4.7 Z=0 の X-Y 平面上におけるトロイダル磁場分布



(a) $0 < t < 150$ $[\tau_A]$



(b) $0 < t < 400$ $[\tau_A]$

初期平衡配位 $\mathrm{A}(\Theta, F) = (2.1, -0.21)$

図 4.8 磁気エネルギートロイダルモードスペクトルの時間発展

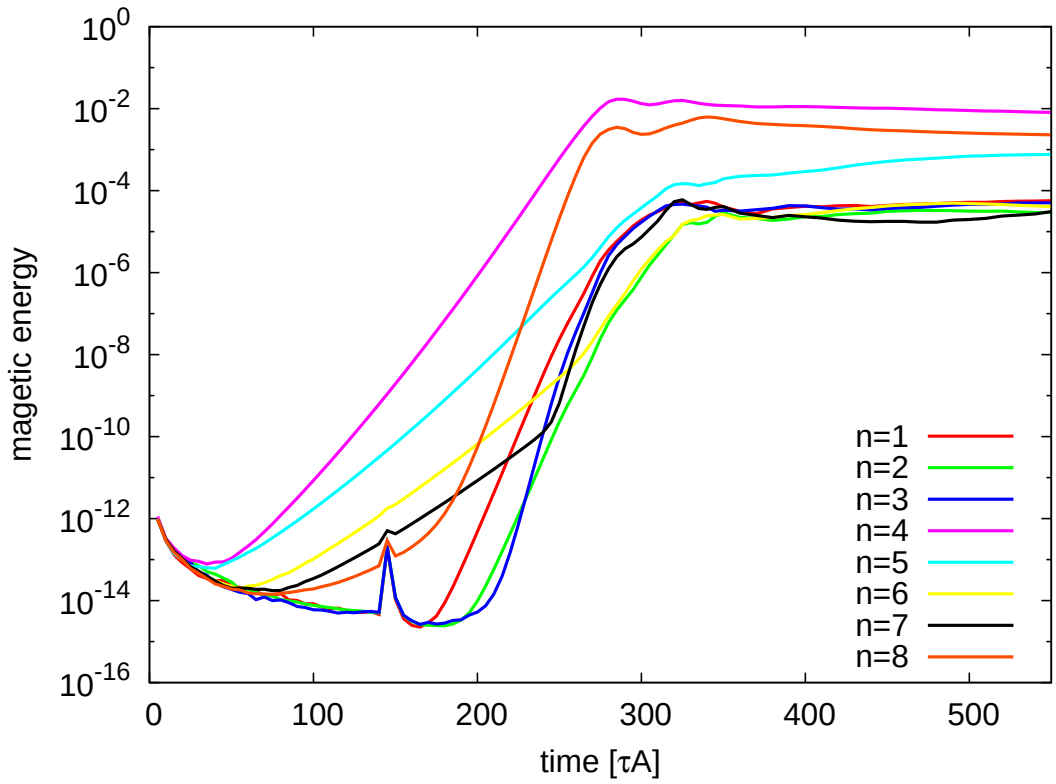


図 4.9 $\eta = 1 \times 10^{-5}$ での磁気エネルギートロイダルモードスペクトルの時間発展

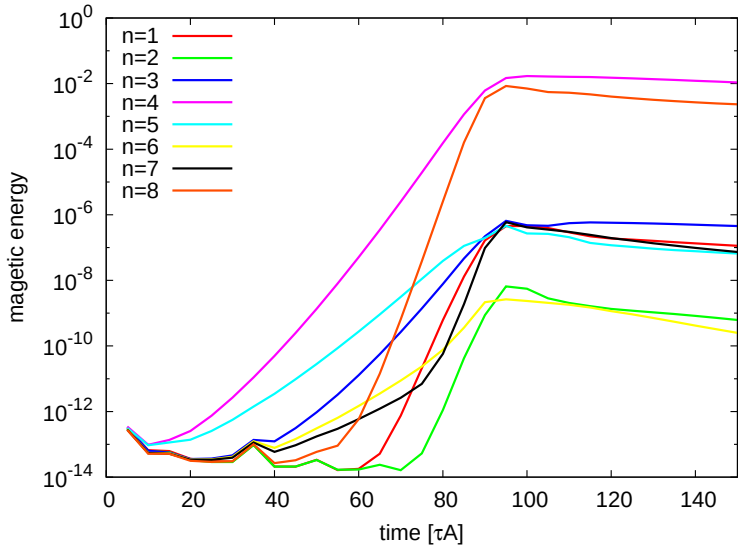


図 4.10 $\mu = 1 \times 10^{-3}$ での磁気エネルギートロイダルモードスペクトルの時間発展

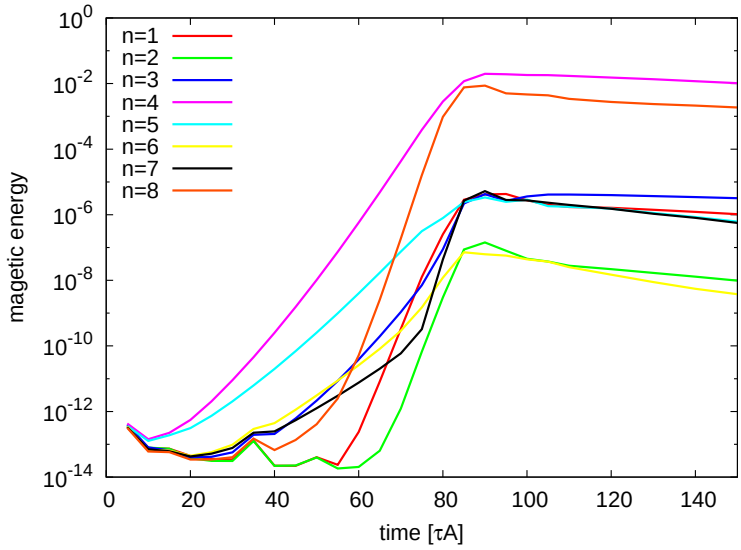


図 4.11 $\mu = 5 \times 10^{-4}$ での磁気エネルギートロイダルモードスペクトルの時間発展

表 4.1 シミュレーションの初期配位と (F, Θ) の関係

	Θ	F
A	2.1	-0.21
B	1.5	0.12
C	1.7	0.0
D	1.9	-0.39
E	2.5	-0.65
F	2.6	-0.75
G	2.9	-1.0

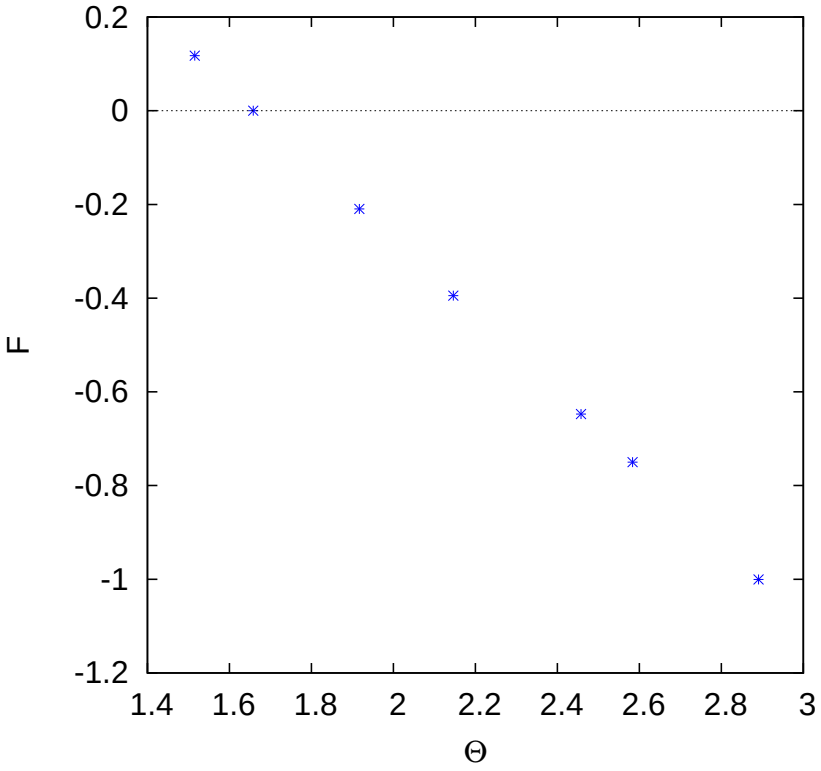


図 4.12 初期平衡配位の $F - \Theta$ 分布

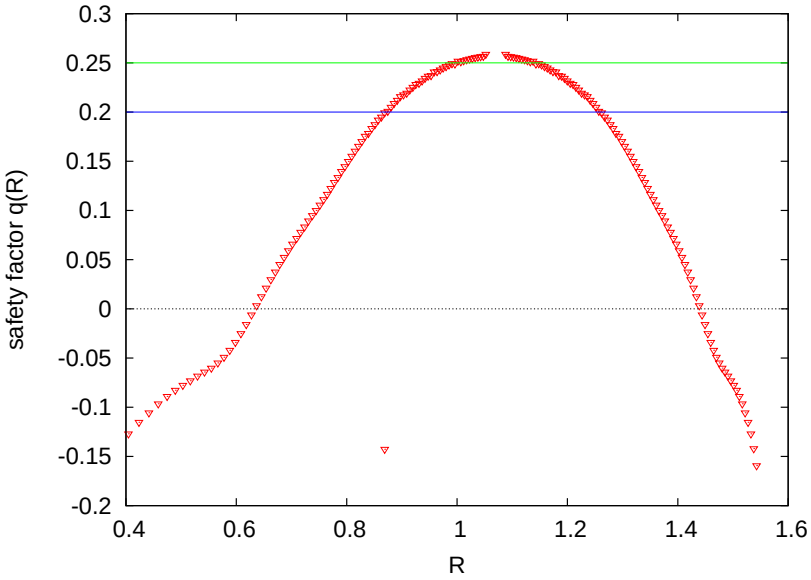


図 4.13 初期平衡配位 A の $q(R)$ 分布

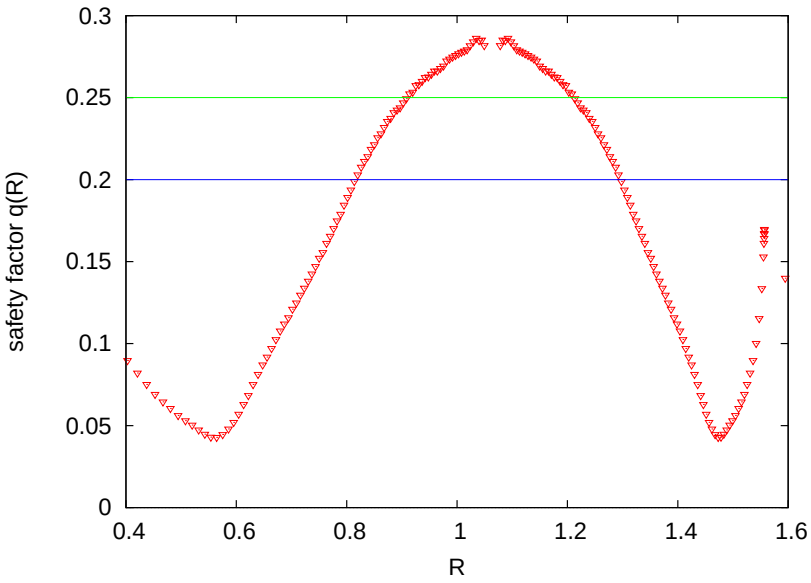


図 4.14 初期平衡配位 B の $q(R)$ 分布

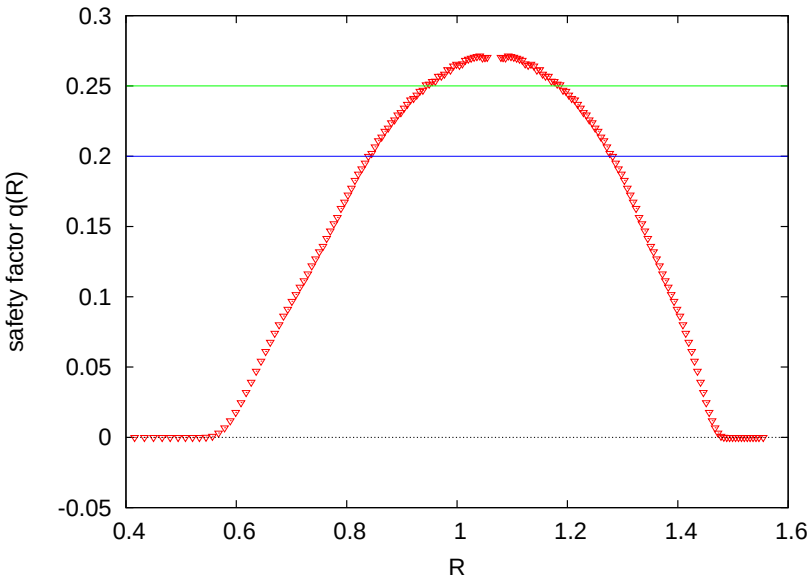


図 4.15 初期平衡配位 C の $q(R)$ 分布

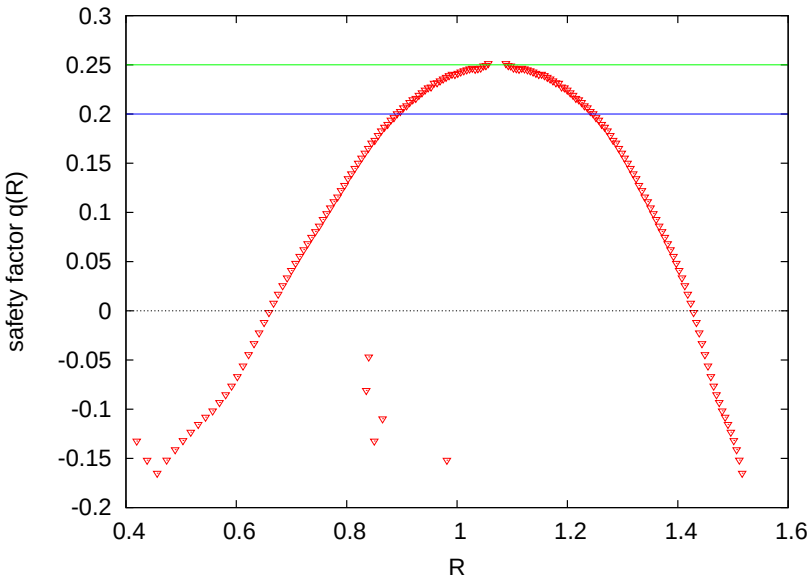


図 4.16 初期平衡配位 D の $q(R)$ 分布

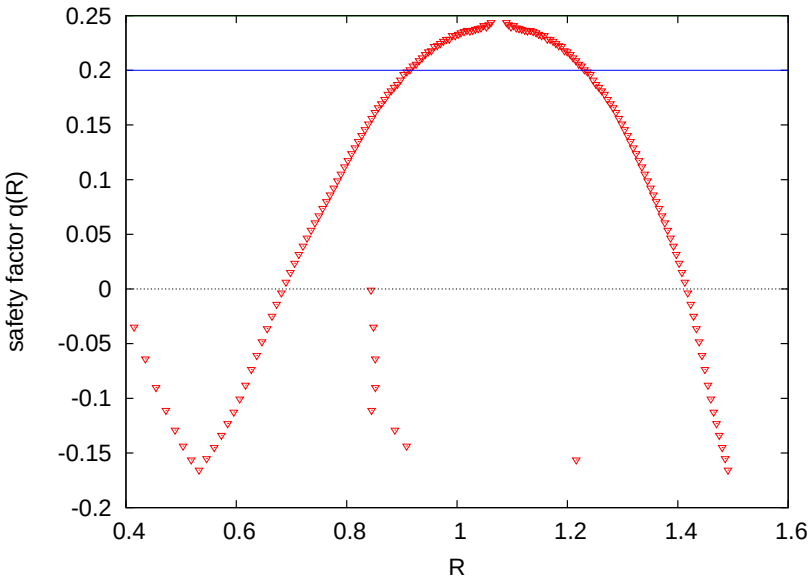


図 4.17 初期平衡配位 E の $q(R)$ 分布

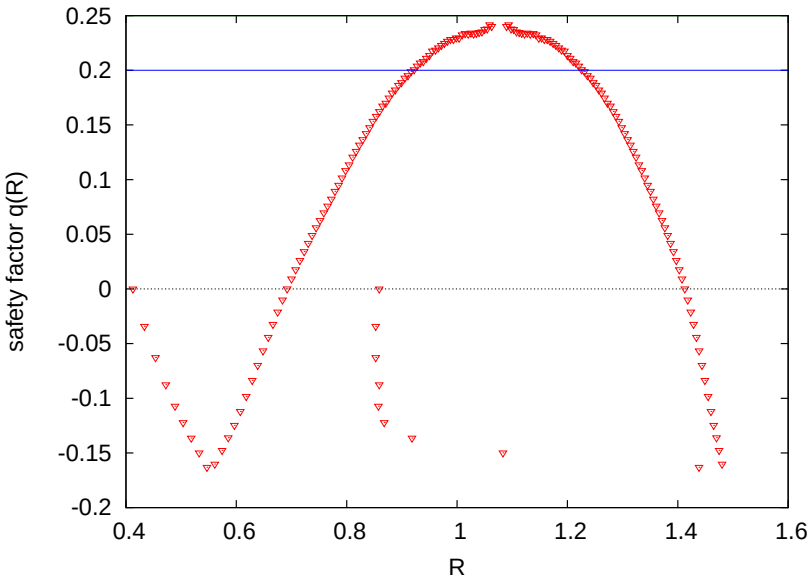


図 4.18 初期平衡配位 F の $q(R)$ 分布

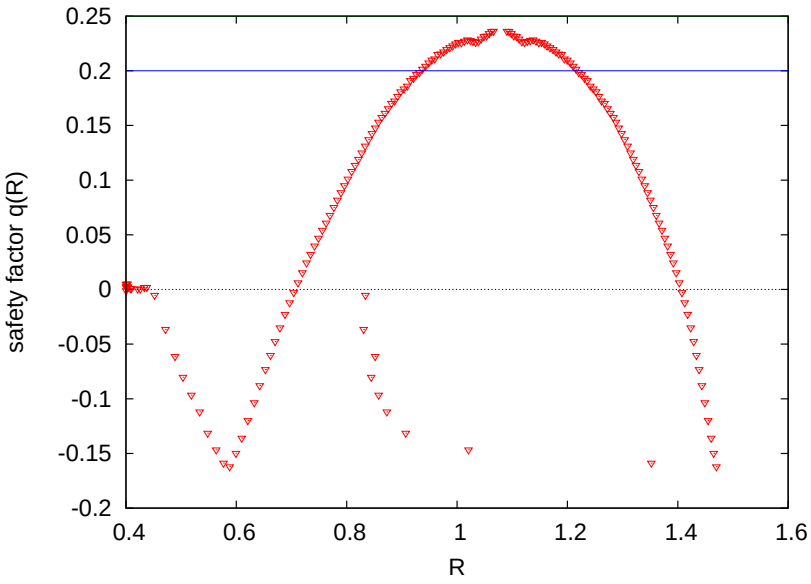


図 4.19 初期平衡配位 G の $q(R)$ 分布

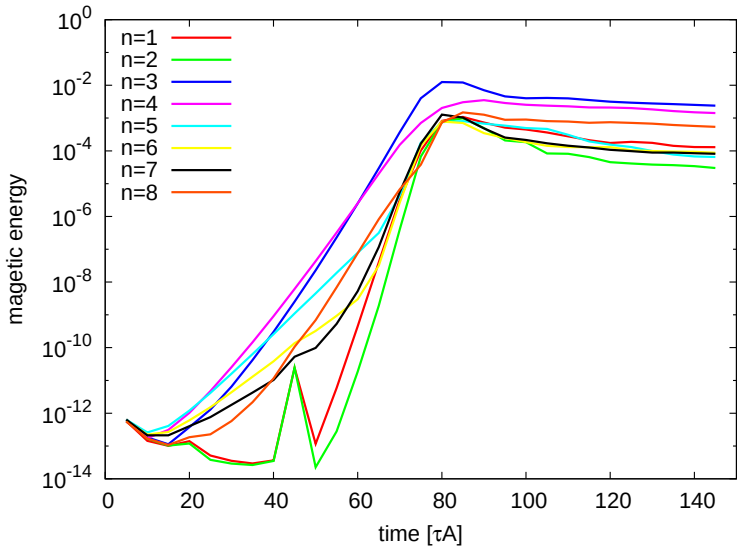


図 4.20 初期平衡配位 $\mathbf{B}(\Theta, F) = (1.5, 0.12)$

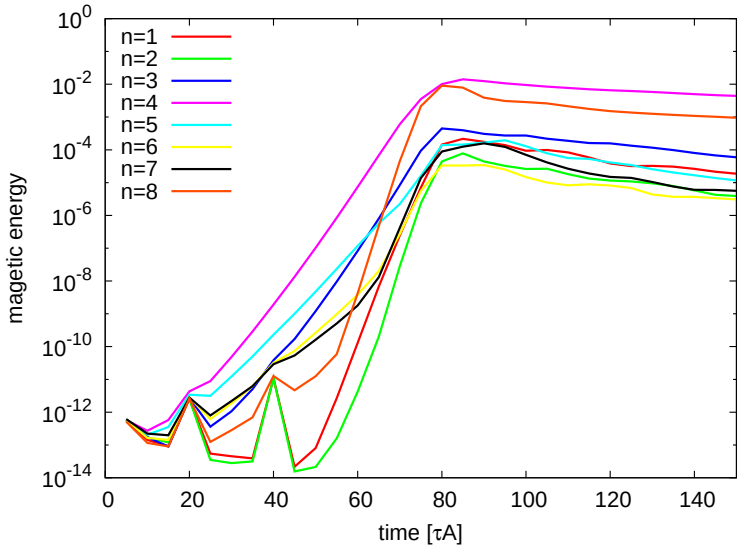


図 4.21 初期平衡配位 $\mathbf{C}(\Theta, F) = (1.7, 0.0)$

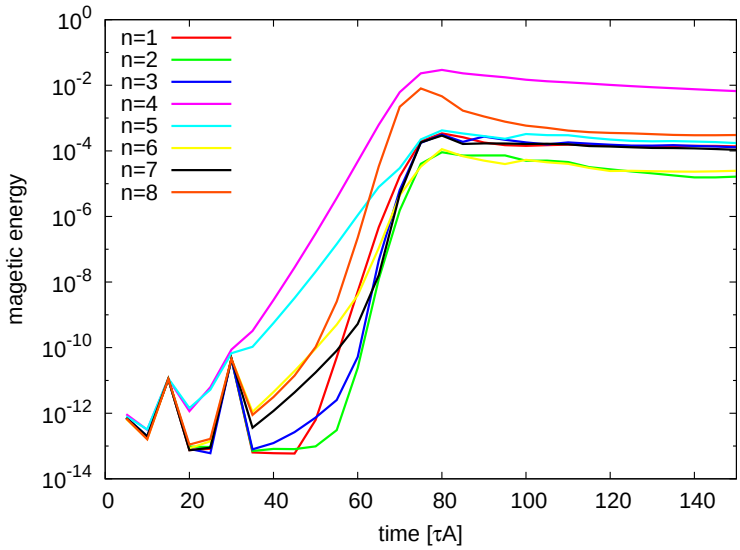


図 4.22 初期平衡配位 $\mathbf{D}(\Theta, F) = (1.9, -0.39)$

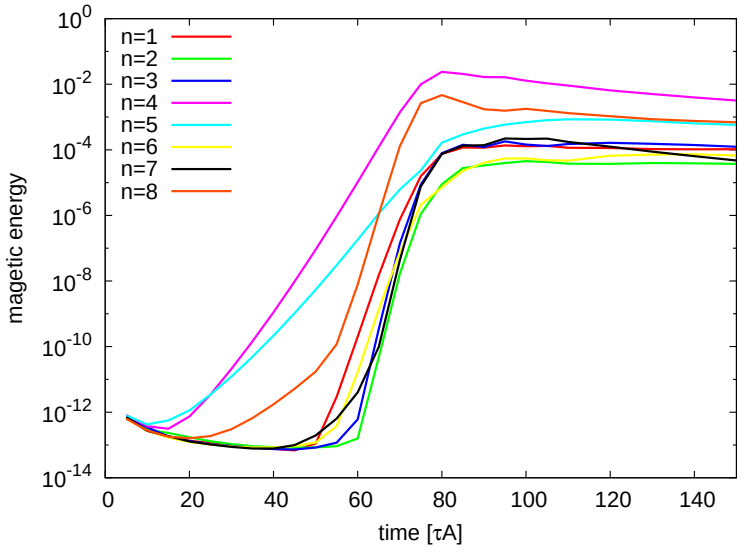


図 4.23 初期平衡配位 $\mathbf{E}(\Theta, F) = (2.5, -0.65)$

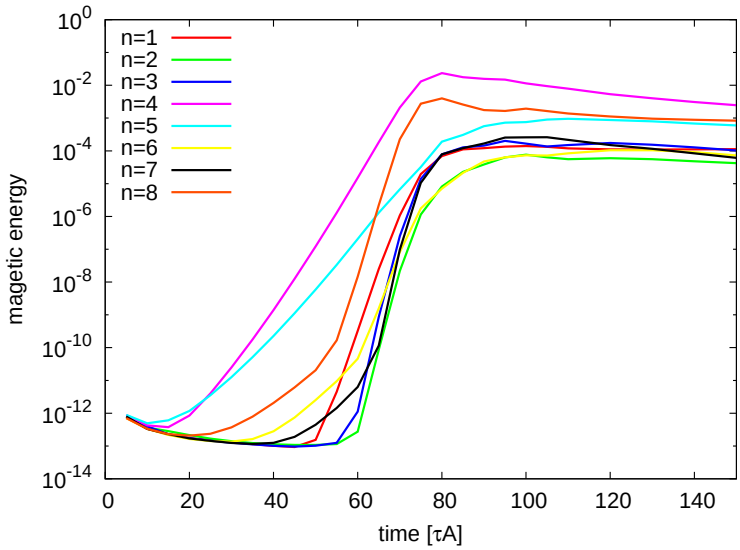


図 4.24 初期平衡配位 $\mathbf{F}(\Theta, F) = (2.6, -0.75)$

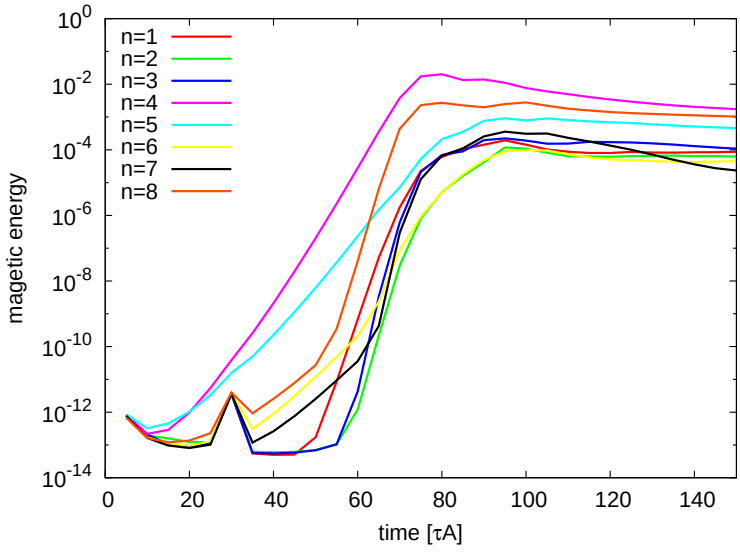


図 4.25 初期平衡配位 $\mathbf{G}(\Theta, F) = (2.9, -1.0)$

第 5章　考察

図 4.4 と 4.6 を比較すると $t = 76\tau_A$ において，圧力が小さくなっている位置で磁場は大きくなっている．この観点で圧力分布をみると，圧力分布の中心での減少とトロイダル磁場の中心での増加の関係にある．図 4.2 において $t < 70$ の範囲では磁場から圧力へエネルギーの輸送が行われているが，運動エネルギーがピークの値を持つ $70 < t < 90$ の範囲で圧力から磁場へのエネルギーの移動が見られる．図**??**運動エネルギーとトロイダルモードの時間発展を示す．この図では系の運動エネルギーの発展の様子とトロイダルモード数 $n = 4$ のエネルギーの立ち上がりの様子がよく似ている．これは $n = 4$ モードの成長と運動エネルギーの増加に関係があることを示している．図 4.5 における $t = 70\tau_A$ において圧力分布に強弱が表れている．トロイダル磁場をトロイダル方向へフーリエ分解したものと磁場との関係をみる．この結果をフーリエ分解した結果を図 5.3 に示す．図において縦軸は Y 方向の位置を表し，横軸は X 方向の位置を表し，カラーマップは位置 (X, Y) における特定のトロイダルモード数に対するトロイダル磁場の大きさを表す．$(X, Y) = (0, 0)$ は図 3.1 における Z 軸である．図 4.5 と 5.3 を比較すると，n=4 モードの磁場が負であるとき，圧力が小さくなり，磁場が正のとき圧力が強くなっている．したがって磁場の変化に対応して，圧力の分布が変化したと考える．また，図 5.2 は縦軸は Z 方向の位置を表し，横軸は R 方向の位置を示し，カラーマップはトロイダルモード $n = 4$ の振幅をを表している．この図では中心部と周辺部にポロイダルモード $m = 1$ の構造がある．また，図 5.4 では $n = 8$ についての振幅を表しており，図 5.2 と同様の位置にポロイダルモード $m = 2$ の構造がある．これらの中心部での構造は $q = m/n = 1/4 = 2/8$ に対応する有理面上で励起された不安定性である．また，定常状態へ緩和した後には，平坦な圧力分布が見られた．これは Taylor の緩和理論に見られるような無力配位 ($\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$=0) になっていると考えている．

$\eta = 10^{-4}$ である図 4.8 では，トロイダルモードの成長はおよそ $t = 100\tau_A$ で成長している．また，$\eta = 10^{-5}$ である図 4.9 では，およそ $t = 320\tau_A$ で成長している．プラズマの抵抗率が小さくなると不安定性の成長率が小さくなることから，シミュレーションにおいてみられる不安定性は抵抗性不安定性である．また，ジュール加熱によって圧力が増加しているため圧力駆動型の不安定性であるかどうかを確かめるた

めに，MHD 方程式におけるエネルギー方程式のジュール加熱項を除外したシミュレーションを行った．それ以外の状況は 4.1 節における条件と同じとした．その結果のトロイダルモードの時間発展を図 5.5 に示す．図 4.8 と比較すると，図 4.8 での結果のほうが高い成長率を示している．したがって抵抗性不安定性だけでなく圧力駆動型不安定性も含んでいる．

4.2 節に示したように粘性定数によって，トロイダルモードの成長率が異なっている．図 5.6 に粘性定数による $n = 4, 5, 6$ モードの変化を示す．この 5.6 から明らかなように，主要モードである $n = 4$ モードにおいては，粘性定数が低いほうが線形成長率は高くなっていて，飽和するまでの時間も短くなっているが，定常状態での振幅に大きな差異はない．しかし，そのほかの $n = 5, 6$ モードに関しては粘性定数が高いほうが定常状態での振幅が小さい．これは磁場配位に含まれる特定のモード数がプラズマの粘性に対して，安定・不安定であるためと考えられる [17].

様々な初期配位を用いてシミュレーションを行った結果について，$t = 140\tau_A$ において，主要モードとその次のモード $n = 4$ に対して $n = 3, 5$ モードとの振幅の比を求めた．その結果を図 5.8 に示す．この図は初期配位の F との依存性を表し，縦軸は振幅比を表す．この図に示されるように $-0.4 < F < 0$ の範囲では $n = 4$ モードの振幅が支配的になっている．この結果は実験装置“ RELAX ”で見られる傾向と一致している [15]，[16]．初期配位 A,B,C,D では $m/n = 1/4$ の有理面を含んでいるため、この共鳴面で不安定性が成長するが、初期配位 E,F,G では $m/n = 1/4$ の有理面を含まないにも関わらず、$n = 4$ の成長が見られる．これは揺動が内部を伝搬していく過程で、当初なかった $m/n = 1/4$ の有理面を生成するためであると考えている．

磁気エネルギーのトロイダルモードスペクトルの時間発展の複数の図において，おかしなピークを持つものがあるが，これはシミュレーション計算上での処理によるものであり，データサンプリングの間隔が広いために顕著に見えるが，シミュレーション計算への影響はほとんどないと考えている．

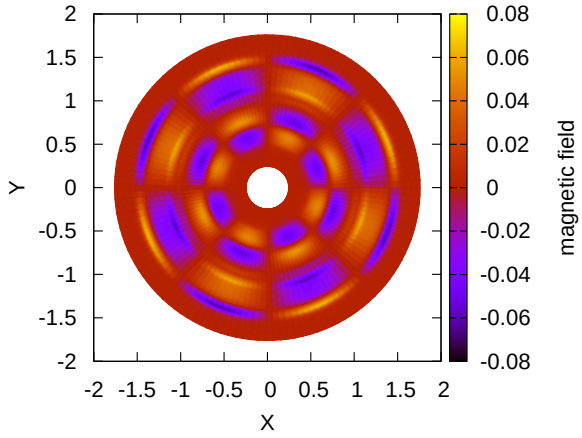


図 5.1 t=70 におけるトロイダル磁場の $n = 4$ モード成分のトロイダル分布

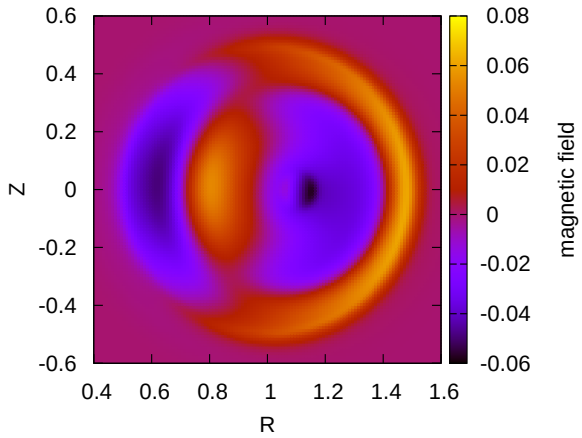


図 5.2 t=70 におけるトロイダル磁場の $n = 4$ モード成分のポロイダル分布

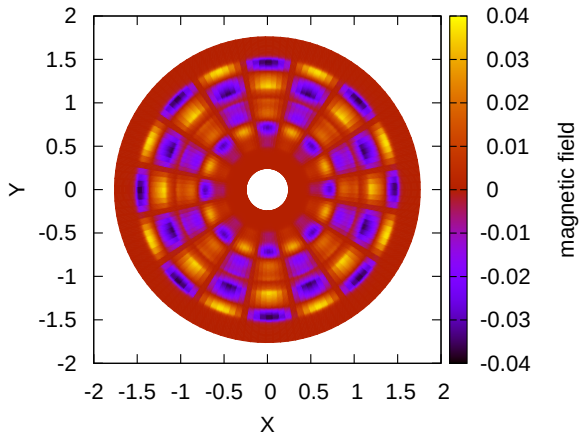


図 5.3 t=70 におけるトロイダル磁場の $n = 8$ モード成分のトロイダル分布

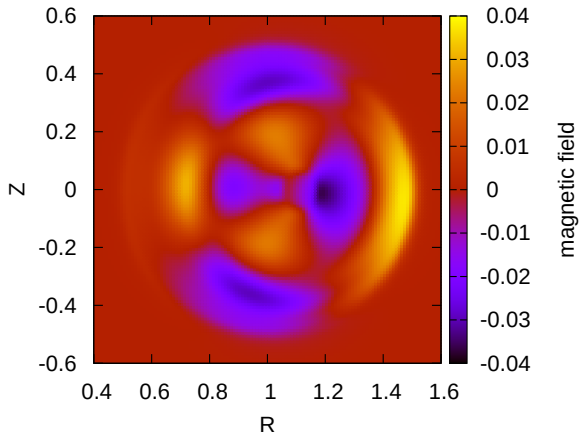


図 5.4 t=70 におけるトロイダル磁場の $n = 8$ モード成分のポロイダル分布

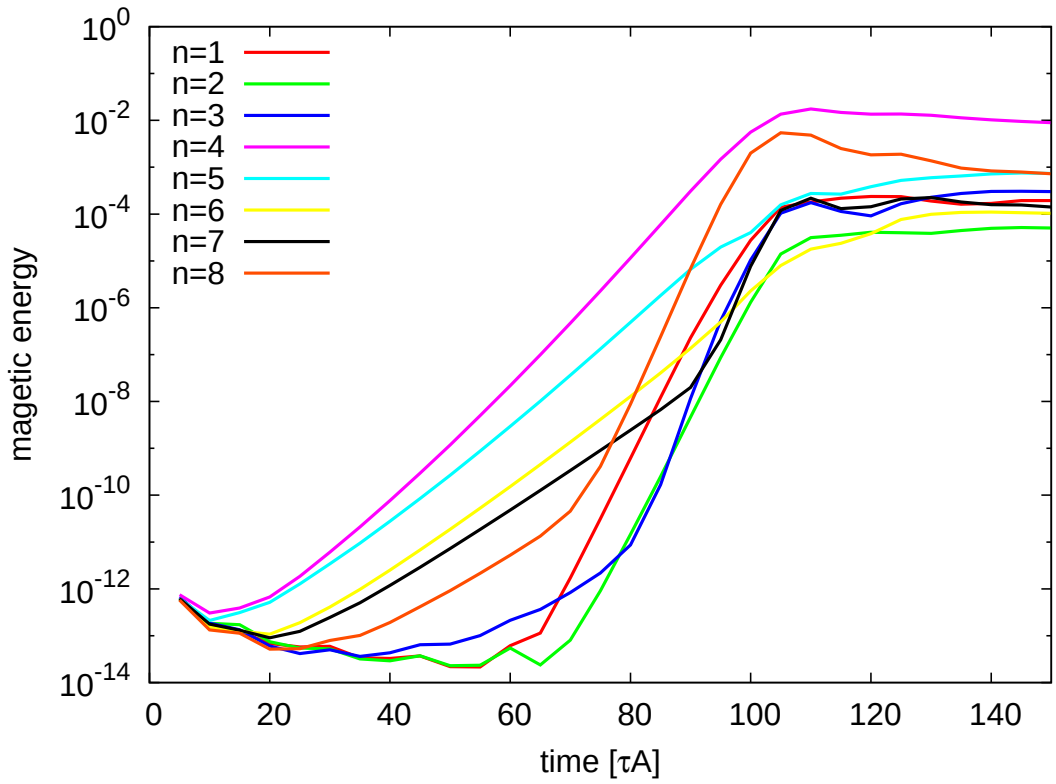


図 5.5 ジュール加熱項を除外した時のトロイダルモードの時間発展

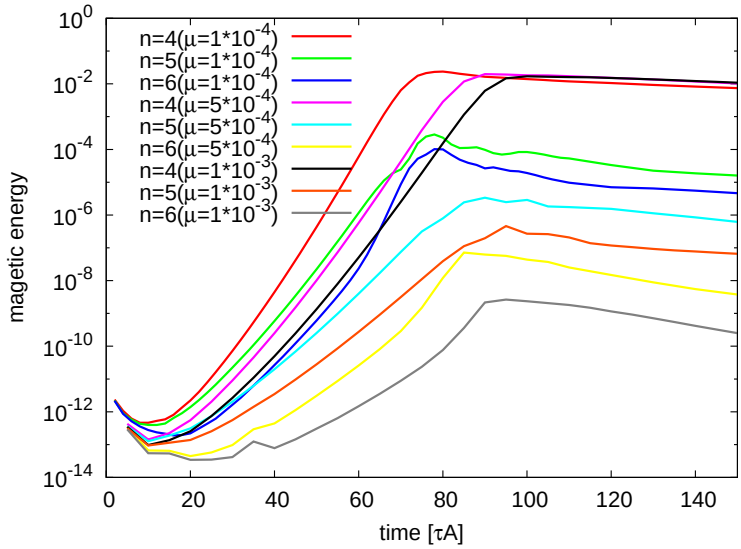


図 5.6 $n = 4, 5, 6$ **モードに対する** μ **の依存性の比較**

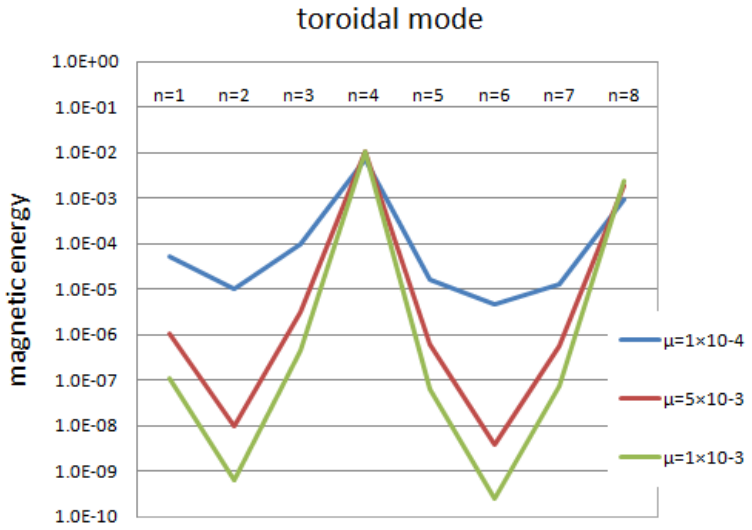


図 5.7 $t = 150[\tau_A]$ **における粘性定数とトロイダルモードの関係**

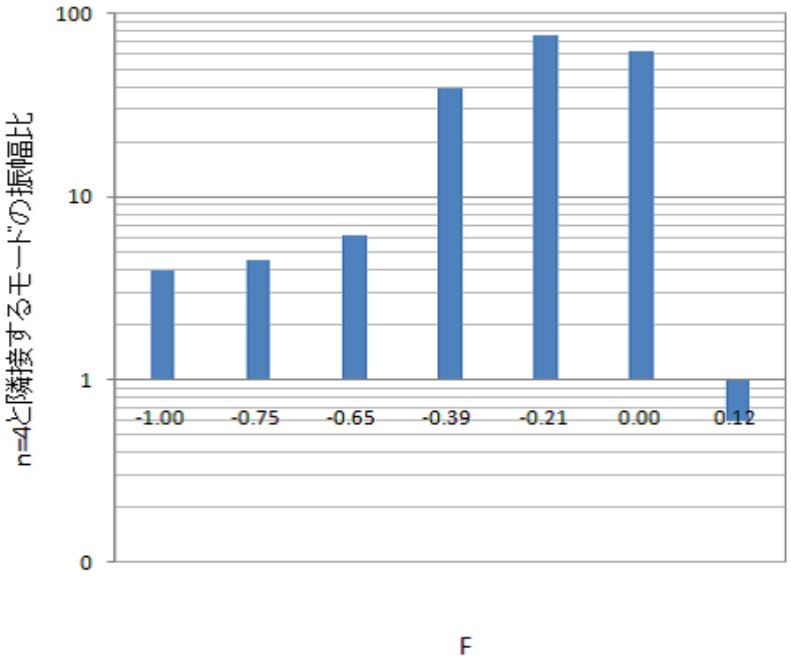


図5.8 定常状態における第１モードの第２モードの振幅比のF依存性

第 6 章　結言

アスペクト比が 2 である RFP 磁場配位を対象とした抵抗性 MHD モデルを用い 3 次元数値シミュレーションを行った．その結果 MHD ダイナミクスとして，ポロイダル数 $m = 1$，トロイダル数 $n = 4$ モードの線形成長が得られる．また，プラズマに与えた揺動が成長し，これが緩和する現象が現れる．特に中心での圧力分布には Taylor の緩和理論に見られるような $\nabla p = 0$ であるような平坦な分布が見られる．したがって，定常状態では無力配位へ遷移していると考えられる．$n = 4$ モードの成長と同時に $n = 8$ モードも成長しているが，$n = 8$ モードは $n = 4$ モードの共鳴面と同じ面で成長しる．これは $n = 4$ モードの高調波であり，その構造は m/n=2/8 である．

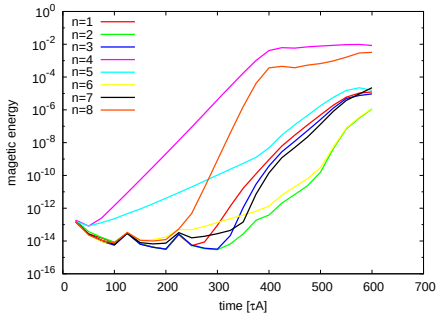
シミュレーションにおいて MHD 不安定性が成長して緩和しているが，この磁場配位ではプラズマの抵抗率が小さくなると不安定性の成長率は小さくなるので，主要な不安定性は抵抗型不安定性である．また粘性定数へは主要モード $(n = 4)$ への影響はほとんどなく，主要モード以外のモードへは大きく影響する．

異なる初期配位においてもシミュレーションを行った結果，同様の定常状態への緩和現象が得られる．初期配位での中心の有理面に関わらず，$n = 4$ モードの高い成長が見られる．また，配位の違いによって $n = 3, 5$ の成長が見られ，これらの構造は $m/n = 1/3$ または $m/n = 1/5$ の構造を持つ．初期配位が $-0.4 < F < 0$ の範囲において，$n = 4$ モードが支配的な傾向を示す．この傾向は実験装置“ RELAX ”における結果と定性的に一致している．

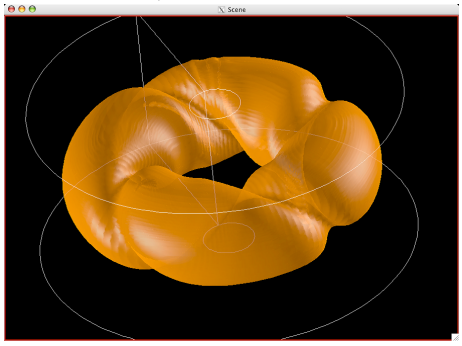
今後の課題として，実験装置における温度計測や密度計測や CT 計測や画像計測により得られた実験結果と定量的に比較することやシミュレーションモデルにおける境界壁等の境界条件を変更ことが挙げられる．

付録

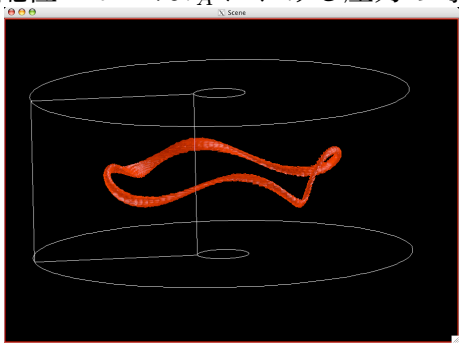
パラメータ依存性での結果において $\eta = 1.0 \times 10^{-6}$ では定常状態へ移行するに至らず，計算が発散したため，付録として結果を示す．4.1 節では５章に示した抵抗性不安定性が支配的と考えているが，この $\eta = 1.0 \times 10^{-6}$ では別の不安定性が生じていると考えている．定常状態での MH の状態ではポアンカレマップには点の集合にしかならないが、粘性を高く QSH の状態へすると磁気島構造とストキャクティックな構造となる。



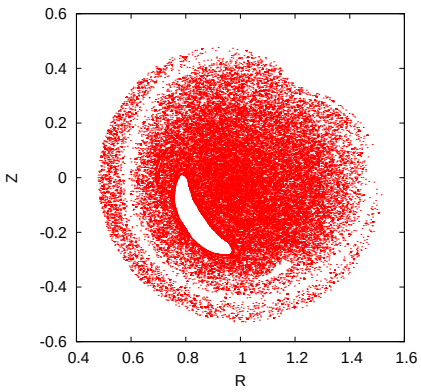
磁気エネルギートロイダルモードスペクトルの時間発展



初期配位 A $t = 75\tau_A$ における圧力の等値面



初期配位 A $t = 300\tau_A$ ピーク圧力の分布



$\mu = 1 \times 10^{-3}$ における $t = 110$ のポアンカレマップ

謝辞

この研究は自然科学研究機構核融合科学研究所シミュレーション科学研究部 LHD 数値解析システムを用い行いました．システムを使用させて頂き誠にありがとうございました．

教授の政宗貞男先生は私の指導教員として，大学院での研究題目を決めるにあたってこの研究へ導いていただきました．先生が多忙を極める中的確な指摘とアドバイスをしていただきました．先生の一言一言には重みがあり私の研究に非常に有効なものでした．また，研究会へも出させていただきました．この経験は貴重なもとのとなりました．

准教授の比村治彦先生は 3 回生でのプラズマ工学の講義や 4 回生での輪講や勉強会でご指導いただきました．研究では直接指導していただくことはありませんでしたが，先生の本質をついた質問に答えられなかった思い出があります．先生のアクティビティは呑気な私の目標です．

助教の三瓶明希夫先生には研究室に配属されたときから大変お世話になりました．卒業研究では先生が作製した平衡解析コード RELAXfit を用いた研究をさせていただきました．先生の平衡解析コードがなければ，私が研究としてシミュレーションをすることはなかったと思います．

核融合科学研究所大型ヘリカル研究部准教授水口直紀先生は私の研究の基礎を作っていただきました．水口先生はだけでなくシミュレーションコードを引用させて頂いたりだけでなく NIFS のスーパーコンピュータを使用できるように申請していただいたり解析コードを参照させていただいたり，結果の相談をさせていただきました，本当にありがとうございました．先生のアドバイスがなければ修士論文を書けるところまでに至らなかったと思います．

研究室の先輩・同輩・後輩にも大変お世話になりました．特に RFP グループの先輩である，池添さん，恩地さん，村田さん，大木さん，島津さん，山下さんには実験装置の操作や装置技術を１から教えて頂きました．４回生の頃に建造した RELAX は思い出深いものです．同級生の入江君，小西君，杉原君，杉本君，武村君，山田君，和田君は同期生として様々なことで競争できて，なかなか深い付き合いができたと思います．これからもよろしく．後輩の田中君，中村君，東君，平松君，元井

君，山崎君，葉名君，坪内君，山本哲生君，山本亮輔君，深堀君，西岡君，伊藤さん，太田君，牧戸君楽しい研究室生活をありがとう，これからも，研究室を盛り上げていってください．私の研究室での貢献度はほとんどありませんが，３年間研究室の皆様には楽しい生活を送らしていただきました．ありがとうございました．

参考文献

[1] K.Hayase; *"High Beta Plasma Confinement and Neoclassical Effects in a Small Aspect Ratio Reversed Field Pinch"* IAEA(2009) IC/P-09

[2] 田中　基彦，西川　恭治; "高温プラズマの物理学" 丸善 (1991) p237

[3] 宮本健郎; "プラズマ物理・核融合" 東京大学出版会 (2004) p53，p101，p319-325

[4] 中山泰喜 "流体の力学" 養賢堂 (2003) p75-79

[5] Sergio Ortolani,Dalton D. Schnack; *"Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation"* World Scientific Pub Co Inc (1993) p20-22

[6] 内田岱二郎; "プラズマ物理入門" 丸善株式会社 (2005) p146

[7] 棚橋 隆彦; "電磁熱流体の数値解析—基礎と応用" 森北出版 (1995)

[8] J.A.Edununuster "電磁気学" オーム社 (1996) p219

[9] J.B.Taylor; *"Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields"* Phys.Rev.Lett.33(19) 1139-1141(1974)

[10] Sergio Ortolani,Dalton D. Schnack; *"Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation"* World Scientific Pub Co Inc (1993) p24-25

[11] 小門純一，八田夏夫 "数値計算法の基礎と応用" 森北出版 (1988) p81,p115

[12] 核融合科学研究所シミュレーション科学研究部*"LHD* 数値解析システム"http://www.dss.nifs.ac.jp/nifscc/lhd.html

[13] A.Sanpei *"Equilibrium Reconstruction and Estimation of Neoclassical Effect in Low-Aspect-Ratio Reversed Field Pinch Experiments on RELAX"* Phys. Plasmas(2000) vol.7(3)

[14] N.Mizuguchi *"Dynamics of spherical tokamak plasma on the internal reconnection event"* Phys. Plasmas(2000) vol.7(3) p940-949

[15] R.Ikezoe; *"Quasi-Periodic Growth of a Single Helical Instability in a Low-Aspect Ratio RFP "* Plasma and Fusion Research Volume 3, 029 (2008)

[16] K.Oki; *"Observation of Large-Scale Profile Change of Magnetic Field in a Low-Aspect Ratio Reversed Field Pinch"* Physical Society of JapanVol. 77, No. 7 (2008) 075005

[17] S.Cappello; *"Bifurcation in Viscoresistive MHD: The Hartmann Number and the Reversed Field Pinch"* Phys.Rev.Lett.85(18) p3838-3841(2000)